# Curve in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Sia $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua.

- Diciamo che *$\gamma$ è di classe $C^1([a, b])$* se ogni componente $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ è di classe $C^1([a, b])$, ossia se per ogni $i = 1, \dots, n$
  - $\gamma_i$ è derivabile su $(a, b)$;
  - esistono le derivate
  $$\gamma_i'(a) := \lim_{t\to 0^+} \frac{\gamma_i(a+t) - \gamma_i(a)}{t} \qquad \text{e} \qquad \gamma_i'(a) := \lim_{s\to 0^-} \frac{\gamma_i(b+s) - \gamma_i(b)}{s} \ ;$$
  - la funzione $\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2', \dots, \gamma_n') : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è continua.
- $\gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t)\big)$ è un *vettore tangente* alla curva $\gamma$ nel punto $\gamma(t)$. Il vettore normalizzato
  $$\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \in \mathbb{R}^n$$
  è il *versore tangente* alla curva nel punto $\gamma(t)$, dove
  $$|\gamma'(t)| = \sqrt{\big(\gamma_1'(t)\big)^2 + \big(\gamma_2'(t)\big)^2 + \dots + \big(\gamma_n'(t)\big)^2} \ .$$
- Diciamo che $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è *$C^1$ a tratti* se $\gamma$ è continua su $[a, b]$ e se esiste una partizione
  $$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$$
  tale che $\gamma : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1([t_{j-1}, t_j])$ per ogni $j = 1, \dots, k$.
- Diciamo che la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è *chiusa* , se $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Diciamo che la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è *semplice*, se $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva, ossia se vale
  $$\gamma(t) \neq \gamma(s) \quad \text{per ogni} \quad t \neq s \in (a, b).$$
  Per esempio, la curva
  $$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
  è semplice.

**Esempio 1.** *La curva*
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
*è semplice, chiusa e di classe $C^1$. Inoltre, il suo versore tangente è*
$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$
*Infatti, abbiamo $|\gamma'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$.*

**Esempio 2.** *La curva*
$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
*è chiusa, ma non è semplice.*

**Esempio 3.** *La curva*
$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
*è semplice, ma non chiusa. Infatti $\gamma(0) = (1, 0) \neq (-1, 0) = \gamma(\pi)$.*

**Esempio 4.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1([a, b])$. Allora la curva*
$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \big(t, f(t)\big),$$
*è di classe $C^1$ è parametrizza il grafico di $f$. La curva $\gamma$ è semplice, ma non chiusa. Inoltre,*
$$\gamma'(t) = \big(1, f'(t)\big) \qquad e \qquad |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (\gamma'(t))^2} \ .$$

**Definizione 5** (Concatenamento)**.** *Date due curve*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [b, c] \to \mathbb{R}^n,$$

*tali che* $\gamma(b) = \sigma(b)$*, definiamo il concatenamento* $\gamma * \sigma : [a, c] \to \mathbb{R}^n$ *come*

$$\gamma * \sigma(t) := \begin{cases} \gamma(t), & se \quad t \in [a, b]; \\ \sigma(t), & se \quad t \in [b, c]. \end{cases}$$

*Osserviamo che se* $\gamma$ *e* $\sigma$ *sono* $C^1$ *a tratti, allora anche la curva* $\gamma * \sigma$ *lo è.*

**Definizione 6.** *Date una curve* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$*, definiamo la curva* $\gamma_- : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *come*

$$\gamma_-(t) := \gamma(a + b - t) \quad per\ ogni \quad t \in [a, b].$$

*Osserviamo che se* $\gamma$ *è* $C^1$ *a tratti, allora* $\gamma_-$ *lo è. Inoltre,*

- $\gamma$ *è chiusa* $\Leftrightarrow$ $\gamma_-$ *è chiusa;*
- $\gamma$ *è semplice* $\Leftrightarrow$ $\gamma_-$ *è semplice;*
- $\gamma'(t) = -\gamma_-'(a + b - t)$ *e* $|\gamma'|(t) = |\gamma_-'|(a + b - t)$ *per ogni* $t \in [a, b]$.

**Esercizio 7.** *Trovare una curva semplice, chiusa e* $C^1$ *a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y < g(x),$$

*dove:*

*(1)* $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x^4 - 1$.
*(2)* $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - x$.
*(3)* $f(x) = e^x$, $g(x) = 3 - 2e^{-x}$.

**Esercizio 8.** *Trovare una curva semplice, chiusa e* $C^1$ *a tratti che parametrizza il bordo del rettangolo* $[1, 2] \times [3, 4]$.

**Esercizio 9.** *Trovare una curva semplice, chiusa e* $C^1$ *a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in B_1 \ : \ y \geq 0.$$

**Esercizio 10.** *Trovare una curva semplice, chiusa e* $C^1$ *a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in B_1 \ : \ y \leq x, \ x \geq 0.$$

**Esercizio 11.** *Trovare una curva semplice, chiusa e* $C^1$ *a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R} \ : \ g(x) < y < f(x),$$

*dove:*

*(1)* $(a, b) = (-1, 1)$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -1 - x^2$.
*(2)* $(a, b) = (0, 1)$, $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = -x^2 - x$.

**Esercizio 12.** *Trovare una curva semplice, chiusa e* $C^1$ *a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in B_{2\sqrt{2}} \ : \ x \geq 0, \ -x^2 - x \leq y \leq x^2 + x.$$

---

**Definizione 13.** *Diciamo che le curve*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [A, B] \to \mathbb{R}^n$$

*sono equivalenti, se esiste una funzione* $g : [a, b] \to [A, B]$ *di classe* $C^1([a, b])$ *tale che*

$$g(a) = A, \quad g(b) = B, \quad \gamma = \sigma \circ g \qquad e \qquad g' > 0 \quad su \quad [a, b].$$

## Integrali curvilinei. Integrale di una funzione su una curva

Siano $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva di classe $C^1$. Definiamo l'integrale di $F$ su $\gamma$ come

$$\int_\gamma F = \int_a^b F(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt.$$

**Osservazione 14.** *Se $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora*

$$\int_\gamma (\alpha F + \beta G) = \alpha \int_\gamma F + \beta \int_\gamma G.$$

**Osservazione 15.** *Se $\sigma : [b,c] \to \Omega$ è una curva $C^1$ a tratti e tale che $\gamma(b) = \sigma(b)$, allora*

$$\int_{\gamma * \sigma} F = \int_\gamma F + \int_\sigma F \qquad e \qquad \int_{\gamma^-} F = \int_\gamma F.$$

**Osservazione 16** (L'integrale non dimende dalla parametrizzazione)**.** *Supponiamo che le curve*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [A,B] \to \mathbb{R}^n$$

*sono equivalenti. Allora $\int_\gamma F = \int_\sigma F$. Infatti, se $g : [a,b] \to [A,B]$ è la funzione tale che $\gamma = \sigma \circ g$, allora*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_a^b F(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \qquad \textit{(per definizione)}\\
&= \int_a^b F(\sigma(g(t)))\,|\sigma'(g(t))|g'(t)\,dt \qquad \textit{(qui usiamo che } g' > 0\textit{)}\\
&= \int_A^B F(\sigma(s))\,|\sigma'(s)|\,ds \qquad \textit{(cambiamo variavile: } s = g(t),\ ds = g'(t)\,dt\textit{)}\\
&= \int_\sigma F \qquad \textit{(per definizione).}
\end{aligned}$$

### Integrali curvilinei e partizioni

**Teorema 17.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva $C^1$ a tratti. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:*

*Se $\mathcal{P} = \{t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k\}$ è una partizione di $[a,b]$ con $\operatorname{diam}(\mathcal{P}) \le \delta$, allora:*

$$\left| S_{F,\gamma}(\mathcal{P}, \xi) - \int_\gamma F \right| \le \varepsilon,$$

*per ogni vettore $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^k$ ($k$ è il numero di intervalli della partizione) con*

$$\xi_k \in [t_{j-1}, t_j] \quad \textit{per ogni} \quad j = 1, \dots, k,$$

*e dove abbiamo usato $S_{F,\gamma}(\mathcal{P}, \xi)$ per indicare la somma parziale*

$$S_{F,\gamma}(\mathcal{P}, \xi) := \sum_{j=1}^k F(\gamma(\xi_j))\,|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|,$$

*e*

$$\operatorname{diam}(\mathcal{P}) := \max_{j=1,\dots,k} |t_j - t_{j-1}|.$$

## Curve rettificabili. Lunghezza di una curva

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva continua. Per ogni partizione

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b\}$$

definiamo

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{k} \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big|.$$

**Definizione 18.** *Diciamo che la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è rettificabile, se*

$$\sup_{\mathcal{P}} \mathcal{S}(\mathcal{P}) < +\infty,$$

*dove il* sup *è su tutte le partizioni $\mathcal{P}$ di $[a, b]$. Se $\gamma$ è rettificabile, definiamo la lunghezza di $\gamma$ come:*

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \mathcal{S}(\mathcal{P}).$$

**Lemma 19** (per esercizio)**.** *Se $\mathcal{Q}$ è una partizione più fine di $\mathcal{P}$, allora $\mathcal{S}(\mathcal{P}) \le \mathcal{S}(\mathcal{Q})$.*

**Teorema 20.** *Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una curva $C^1$ a tratti allora $\gamma$ è rettificabile e*

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_\gamma 1 \ .$$

## Esercizi

**Esempio 21.** *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

*Calcolare* $\displaystyle\int_\gamma F$*, dove $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è la funzione*

*(1)* $F(x, y) = 1$*;*
*(2)* $F(x, y) = x^2$*;*
*(3)* $F(x, y) = xy$*;*
*(4)* $F(x, y) = ye^x$*;*
*(5)* $F(x, y) = xf(y)$*.*

**Esempio 22.** *Consideriamo la successione di curve*

$$\gamma_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (t, t^n).$$

*Calcolare il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \textit{lunghezza}(\gamma_n).$$

*Usare solo considerazioni geometriche.*

Siano $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva di classe $C^1$ e

$$\alpha = \alpha_1(x)\,dx_1 + \alpha_2(x)\,dx_2 + \cdots + \alpha_n(x)\,dx_n$$

una 1-forma di classe $C^0$ su $\Omega$. Definiamo l'integrale di $\alpha$ su $\gamma$ come

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt\,,$$

dove $\cdot$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ e dove abbiamo identificato la forma $\alpha$ con il campo vettoriale

$$\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad \alpha(x) = \big(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)\big).$$

Inoltre, se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è $C^1$ a tratti, allora definiamo

$$\int_\gamma \alpha = \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt\,,$$

dove

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

è una qualsiasi partizione di $[a, b]$ tale che $\gamma : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1([t_{j-1}, t_j])$ per ogni $j = 1, \ldots, k$.

**Osservazione 23.** *Se $\alpha$ e $\beta$ sono due 1-forme su $\Omega$, allora*

$$\int_\gamma (\alpha + \beta) = \int_\gamma \alpha + \int_\gamma \beta.$$

**Osservazione 24.** *Se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ e $\sigma : [b, c] \to \Omega$ sono due curve $C^1$ a tratti tali che $\gamma(b) = \sigma(b)$, allora*

$$\int_{\gamma * \sigma} \alpha = \int_\gamma \alpha + \int_\sigma \alpha.$$

**Osservazione 25.** *Se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è una curva $C^1$ a tratt e se*

$$\gamma_- : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \gamma_-(t) = \gamma(a + b - t),$$

*allora*

$$\int_{\gamma_-} \alpha = -\int_\gamma \alpha.$$

**Osservazione 26** (L'integrale di una 1-forma non dipende dalla parametrizzazione)**.** *Supponiamo che le curve*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [A, B] \to \mathbb{R}^n$$

*sono equivalenti. Allora $\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha$. Infatti, se $g : [a, b] \to [A, B]$ è la funzione tale che $\gamma = \sigma \circ g$, allora*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \alpha &= \int_a^b \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \qquad \textit{(per definizione)}\\
&= \int_a^b \alpha(\sigma(g(t))) \cdot \sigma'(g(t))g'(t)\,dt\\
&= \int_A^B \alpha(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s)\,ds \qquad \textit{(cambiamo variabile: } s = g(t),\ ds = g'(t)\,dt\textit{)}\\
&= \int_\sigma \alpha \qquad \textit{(per definizione).}
\end{aligned}$$

**Teorema 27.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $\alpha$ una 1-forma esatta in $\Omega$; precisamente, supponiamo che $\alpha = dF$, dove $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1$ su $\Omega$. Allora, per ogni curva $C^1$ a tratti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ abbiamo*

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

**Teorema 28.** *Sia $\Omega$ un aperto connesso di $\mathbb{R}^d$ e sia $\alpha$ una 1-forma di classe $C^0$ (i coefficienti sono funzioni continue) su $\Omega$. Allora, sono equivalenti:*

*(1) $\alpha$ è esatta;*

*(2) Per ogni curva chiusa $C^1$ a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0$;*

*(3) Se $\gamma : [a,b] \to \Omega$ e $\sigma : [A,B] \to \Omega$ sono due curve $C^1$ a tratti tali che:*

$$\gamma(a) = \sigma(A) \qquad e \qquad \gamma(b) = \sigma(B),$$

*allora $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha$.*

---

## Derivazione sotto il segno dell'integrale

---

**Teorema 29** (Derivazione sotto il segno dell'integrale)**.** *Sia $\mathcal{R} = (A,B) \times (C,D)$ un rettangolo aperto in $\mathbb{R}^2$. Sia $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\mathcal{R})$ e sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e lmimitato contenuto in $(A,B)$. Allora, la funzione*

$$F : (C,D) \to \mathbb{R}, \qquad F(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$$

*è derivabile su $(C,D)$ e per ogni $y \in (C,D)$ si ha*

$$F'(y) = \int_a^b \partial_y f(x,y)\,dx.$$

*Dimostrazione:* Sia $h \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Big(F(y+h) - F(y)\Big) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x,y+h)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right)\\ &= \int_a^b \frac{1}{h}\Big(f(x,y+h) - f(x,y)\Big)\,dx\end{aligned}$$

Per il Teorema gi Lagrange abbiamo che, per ogni $x \in [a,b]$ e $h \in \mathbb{R}$ esiste $\xi_{x,h}$ tale che $|\xi_{x,h}| \le |h|$ e

$$\frac{1}{h}\Big(f(x,y+h) - f(x,y)\Big) = \partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big).$$

Inoltre, l'uniforme continuità di $\partial_y f$ implica che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\text{se} \quad |y' - y| < \delta \quad \text{allora} \quad \big|\partial_y f(x,y') - \partial_y f(x,y)\big| < \varepsilon\ .$$

In particolare, quando $|h| < \delta$,

$$\big|\partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big) - \partial_y f(x,y)\big| < \varepsilon\ .$$

Di conseguenza, sempre quando $|h| < \delta$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\Big(F(y+h) - F(y)\Big) - \int_a^b \partial_y f(x,y)\,dx\right| &= \left|\int_a^b \partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big)\,dx - \int_a^b \partial_y f(x,y)\,dx\right|\\ &\le \int_a^b \big|\partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big) - \partial_y f(x,y)\big|\,dx\\ &\le (a-b)\varepsilon.\end{aligned}$$

In conclusione,

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{1}{h}\Big(F(y+h) - F(y)\Big) - \int_a^b \partial_y f(x,y)\,dx\right| = 0.$$

$\square$

## Forme chiuse in domini semplicemente connessi

**Teorema 30** (Rettangoli)**.** *Consideriamo il rettangolo*

$$\mathcal{R} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n.$$

*Sia $\alpha$ una 1-forma chiusa di classe $C^1$ su $\mathcal{R}$. Allora $\alpha$ è esatta.*

*Dimostrazione (in $\mathbb{R}^2$).* Consideriamo la 1-forma

$$\alpha := a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy,$$

e ricordiamo che

$$\alpha \text{ è chiusa} \;\Leftrightarrow\; d\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \partial_y a = \partial_x b \text{ in } \mathcal{R}.$$

Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ e per ogni $(x,y) \in \mathcal{R}$ definiamo la funzione

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} b(x,s)\,ds.$$

Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\Big(F(x, y+k) - F(x,y)\Big) = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \int_{y}^{y+k} b(x,s)\,ds = b(x,y).$$

Inoltre, nella direzione $x$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big(F(x+h,y) - F(x,y)\Big) &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} a(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} b(x+h,s)\,ds\right) - \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x} a(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} b(x,s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} a(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h}\Big(b(x+h,s) - b(x,s)\Big)\,ds
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{k}\Big(F(x+h,y) - F(x,y)\Big) &= a(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_x b(x,s)\,ds \qquad \text{(abbiamo derivato sotto il segno dell'integrale)} \\
&= a(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_y a(x,s)\,ds \qquad \text{(qui abbiamo usato che } \partial_y a = \partial_x b\text{)} \\
&= a(x,y_0) + \big(a(x,y) - a(x,y_0)\big) \\
&= a(x,y).
\end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo dimostrato che $F$ è derivabile in ogni punto di $\mathcal{R}$ e le sue derivate parziali sono:

$$\partial_x F(x,y) = a(x,y) \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(x,y) = b(x,y).$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
dF &= \partial_x F(x,y)\,dx + \partial_y F(x,y)\,dy \qquad \text{(per definizione della derivata esterna)} \\
&= a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

La forma $\alpha$ è quindi esatta. $\square$

**Definizione 31.** *Diciamo che l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è stellato rispetto al punto $x_0 \in \Omega$, se ha la proprietà seguente. Per ogni $x \in \Omega$ is segmento che collega $x_0$ a $x$ sta in $\Omega$:*

$$tx_0 + (1-t)x \in \Omega \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in [0,1].$$

**Teorema 32** (Aperti stellati)**.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, stellato rispetto al punto $x_0 \in \Omega$. Ogni 1-forma $\alpha$, chiusa e di classe $C^1$ su $\Omega$, è esatta.*

*Dimostrazione (in $\mathbb{R}^2$).* Consideriamo la 1-forma

$$\alpha := a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy,$$

e ricordiamo che

$$\alpha \text{ è chiusa } \Leftrightarrow d\alpha = 0 \Leftrightarrow \partial_y a = \partial_x b \text{ in } \mathcal{R}.$$

Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ e per ogni $(x, y) \in \Omega$ definiamo la funzione

$$F(x,y) := \int_\gamma \alpha,$$

dove

$$\gamma : [0,1] \to \Omega, \qquad \gamma(t) = \big(x(t), y(y)\big), \quad \text{dove} \quad \begin{cases} x(t) = (1-t)x_0 + tx \\ y(t) = (1-t)y_0 + ty \end{cases} .$$

Per definizione di integrale fi una forma su una curva, abbiamo

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^1 \Big(a\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + b\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\Big)\,dt \\ &= \int_0^1 \Big(a\big((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty\big)(x - x_0) + b\big((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty\big)(y - y_0)\Big)\,dt. \end{aligned}$$

Derivando sotto il segno dell'intagrale, abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_x F(x,y) &= \int_0^1 \partial_x\Big(a\big((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty\big)(x - x_0) + b\big((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty\big)(y - y_0)\Big)\,dt \\ &= \int_0^1 \Big(a\big(x(t), y(t)\big) + tx'(t)\partial_x a\big(x(t), y(t)\big) + ty'(t)\partial_x b\big(x(t), y(t)\big)\Big)\,dt \\ &= \int_0^1 \Big(a\big(x(t), y(t)\big) + tx'(t)\partial_x a\big(x(t), y(t)\big) + ty'(t)\partial_y a\big(x(t), y(t)\big)\Big)\,dt \\ &= \int_0^1 \partial_t\Big(t\,a\big(x(t), y(t)\big)\Big)\,dt = a(x,y). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\partial_y F(x,y) = b(x,y)$$

Si conclude come nella dimostrazione del teorema precedente.

Riassumendo, abbiamo dimostrato che $F$ è derivabile in ogni punto di $\mathcal{R}$ e le sue derivate parziali sono:

$$\partial_x F(x,y) = a(x,y) \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(x,y) = b(x,y).$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} dF &= \partial_x F(x,y)\,dx + \partial_y F(x,y)\,dy \qquad \text{(per definizione della derivata esterna)} \\ &= a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy. \end{aligned}$$

La forma $\alpha$ è quindi esatta. $\square$