Integrali impropri all'infinito

Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e tale che

$$f \quad \text{sia integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato } [a, b] \subset [a, +\infty). \tag{1}$$

Diciamo che l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

- converge, se il limite
$$L = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$
esiste ed è finito;
- diverge, se
$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = +\infty.$$

Oss. 1. *Se $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ è continua, allora la condizione (1) è automaticamente verificata.*

Esercizio 2. *Sia $p > 0$ un numero reale. Per ogni $b > 1$, calcolare l'integrale* $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx$.

Proposizione 3. *Sia $p > 0$ un numero reale.*

- *Se $p > 1$, allora l'integrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ *converge.*
- *Se $p \le 1$, allora l'integrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ *diverge.*

Integrali impropri di funzioni positive

Proposizione 4 (Criterio di convergenza per integrali di funzioni positive)**.** *Sia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata per cui vale (1). Se $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$, allora l'integrale improprio* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *o converge, o diverge. In particolare,*

- *Se esiste una costante $C > 0$ tale che*
$$\int_a^b f(x)\,dx \le C \quad \text{per ogni} \quad b \in [a, +\infty)\ ,$$
allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge.*
- *Altrimenti, se*
$$\text{per ogni} \quad C > 0 \quad \text{esiste} \quad b \in [a, +\infty) \quad \text{tale che} \quad \int_a^b f(x)\,dx > C\ ,$$
allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge.*

Proposizione 5 (Criterio del confronto)**.** *Siano $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni limitate per cui vale* (1)*. Supponiamo che*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in [a, +\infty).$$

Allora, si ha che

- *se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge, allora converge anche* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *;*
- *se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge, allora diverge anche* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *.*

Proposizione 6 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Siano $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni limitate e positive per cui vale* (1)*. Supponiamo che*

$$f(x) \geq 0 \quad e \quad g(x) > 0 \quad \textit{per ogni} \quad x \in [a, +\infty),$$

e che esiste ed è finito il limite

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Allora, si ha che

- *se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge, allora converge anche* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *;*
- *se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge, allora diverge anche* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *.*

Esercizio 7. *Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri.*

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{2x^3+1}\,dx$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+\sin x}{x^2+2}\,dx$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}+\cos x}{3x^2+1}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+\sqrt{x}+6}\,dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(2x+1)}{x+\sqrt{x}}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{e^x+\sqrt{x}}\,dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{e^{\sqrt{x}}}\,dx$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{3/2}}\,dx$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+\ln(x^2)}{\ln(\sqrt{x})+x^2}\,dx$.

Esercizio 8. *Sia $p > 0$ un numero reale.*

(a) Per ogni $b > e$, calcolare l'integrale $\displaystyle\int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx.$

(b) Per quali p, l'integrale improprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$ *converge?*

Integrali impropri di funzioni che cambiano segno

Proposizione 9 (Criterio di Cauchy)**.** *Sia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata per cui vale* (1)*. Allora l'integrale improprio* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge se e solo se*

$$\textit{Per ogni} \;\; \varepsilon > 0 \;\; \textit{esiste} \;\; B > a \;\; \textit{tale che} \;\; \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon \;\; \textit{per ogni} \;\; B < b_1 < b_2 < +\infty.$$

Proposizione 10 (Criterio della convergenza assoluta per integrali impropri)**.** *Sia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata per cui vale la proprietà* (1)*. Se l'integrale improprio* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *converge, allora converge anche* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *.*

Esercizio 11. *Usando il criterio della convergenza assoluta, discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri.*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}\,dx\ , \qquad \int_0^{+\infty} \frac{(x+\sin x)\cos(x^2+1)}{\sqrt{x^3+1}}\,dx\ , \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx\ .$$

Esercizio 12. *Sia* $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ *una funzione continua, positiva, monotona decrescente e tale che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

- *Sia* $a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| f(x)\,dx$ *per ogni* $n\in\mathbb{N}$. *Usando la formula di cambio di variabile*

$$\int_{A+C}^{B+C} g(x)\,dx = \int_A^B g(y+C)\,dy \qquad \text{dove} \qquad y = x-C,$$

  dimostrare che la successione a_n *è monotona decrescente e infinitesimale. Dedurre che la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *converge. (Quale criterio di convergenza bisogna utilzzare?)*

- *Usando il risultato del punto precedente, dimostrare che l'integrale improprio* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$ *converge. Applicare questo risultato a* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ *.*

Integrali impropri e serie numeriche

Teorema 13. *Sia* $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *una funzione continua, nonnegativa e monotona decrescente. Allora, l'integrale improprio* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge se e solo se converge la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.