Funzioni continue e limiti di funzioni

Funzioni continue

Proposizione 1. *Siano $a < b < c$ tre numeri reali e siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $g : (b, c) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue sugli intervalli (a, b) e (b, c), e tali che:*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = \ell.$$

Allora, la funzione

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & se \ \ x \in (a, b); \\ L, & se \ \ x = b; \\ g(x), & se \ \ x \in (b, c); \end{cases}$$

è una funzione continua su (a, c).

Esercizio 2. *Trovare i valori del parametro reale $b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua.*

(a) $$F(x) = \begin{cases} 2x + b, \ \ se \ x \geq 1; \\ x^2 - bx + 3, \ \ se \ x < 1. \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} bx^2 - x + 1, \ \ se \ x > 1; \\ -bx^2 + 3x + 1, \ \ se \ x \leq 1. \end{cases}$$

(c) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, \ \ se \ x > 0; \\ x + b, \ \ se \ x \leq 0. \end{cases}$$

(d) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2}, \ \ se \ x > 2; \\ x^2 - x + b, \ \ se \ x \leq 2. \end{cases}$$

(e) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1}, \ \ se \ x > 3; \\ b, \ \ se \ x \leq 3. \end{cases}$$

(f) $$F(x) = \begin{cases} bx + 1, \ \ se \ x \geq 1; \\ bx^3 + 2x - 3, \ \ se \ x < 1. \end{cases}$$

(g) $$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + x + b, \ \ se \ x \geq 1; \\ \dfrac{x^2}{2} - x - 2b, \ \ se \ x < 1. \end{cases}$$

(h) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}, \ \ se \ x > 2; \\ bx + \dfrac{1}{2}, \ \ se \ x \leq 2. \end{cases}$$

(i) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}, \ \ se \ x > 0; \\ b - \dfrac{1}{x-1}, \ \ se \ x \leq 0. \end{cases}$$

Esercizio 3. *Trovare i valori dei parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua.*

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & se \;\; x < 0; \\ ax + b, & se \;\; 0 \leq x \leq 1; \\ -x^2 + 2x + 1, & se \;\; x > 1. \end{cases}$$

Definizione 4. *Sia A un'unione di intervalli (chiusi, aperti o semi-chiusi) e sia $F : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su A; sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di aderenza per l'insieme A. Diciamo che la funzione F ammette un'estensione continua su $A \cup \{x_0\}$, se esiste ed è finito il limite $\lim_{x \to x_0} F(x)$.*

Esercizio 5. *Trovare i valori del parametro reale $a > 0$ per i quali la funzione F ammette un'estensione continua su $\mathbb{R}$.*

(a) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 1}, & se \; x < 1; \\ \dfrac{\sqrt{ax} - 1}{ax - 1}, & se \; x > 1. \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{3x - 3}{\sqrt{3x + 1} - 2}, & se \; x > 1; \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{a(x - 1)}, & se \; x < 1. \end{cases}$$

(c) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2}, & se \; x < 0; \\ \dfrac{\sqrt{ax + 1} - \sqrt{x + 1}}{x}, & se \; x > 0. \end{cases}$$

(d) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(1 + ax)^2 - 1}{(1 + x)^2 - 1}, & si \; x > 0; \\ \dfrac{\sqrt{1 - 2x} - 1}{\sqrt{1 - x} - 1}, & si \; x < 0. \end{cases}$$

Limiti all'inifinito

Esercizio 6. *Calcolare i limiti seguenti*

$$\lim_{x \to +\infty} (2x + 5) \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 5x - 2) \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3 - x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x + 1}) \qquad \lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^3 + 1}) \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 3}{x^2 + x + 6}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x^2 + 2} \qquad \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{2x + 3} - \sqrt{2x - 1}) \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x + 1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x + 1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}}$$

Asintoto obliquo

Definizione 7. *Sia F una funzione reale definita sull'intervallo $A = (t, +\infty)$. Diciamo che la retta definita dall'equazione*

$$y = ax + b,$$

è l'asintoto obliquo (destro) della funzione F, se

$$\lim_{x \to +\infty} \big[F(x) - (ax + b)\big] = 0.$$

Osserviamo, inoltre, che se $y(x) = ax + b$ è l'asintoto obliquo (destro) di F, allora

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} \qquad e \qquad b = \lim_{x \to +\infty} \big(F(x) - ax\big).$$

Esercizio 8 (TD). *Trovare l'asintoto obliquo $y = ax + b$ della funzione F.*

(a) $\quad F(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 1}$

(b) $\quad F(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$

(c) $\quad F(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$

(d) $\quad F(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$

(e) $\quad F(x) = \sqrt{4x^2 + x}$

(f) $\quad F(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}}$