Curve

Esercizio 105. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

e la 1*-forma*

$$\alpha = \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\, dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dy.$$

Allora:

(a) $\int_\gamma \alpha = 1$;

(b) $\int_\gamma \alpha = 2\pi$;

(c) $\int_\gamma \alpha = (2\pi)^2$;

(d) $\int_\gamma \alpha = 0$;

(e) $\int_\gamma \alpha = -1$;

(f) $\int_\gamma \alpha = -2\pi$;

(g) $\int_\gamma \alpha = -(2\pi)^2$;

Esercizio 106. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$$

e la 1*-forma*

$$\alpha = \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\, dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dy.$$

Calcolare $\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 107. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

e la 1*-forma*

$$\alpha = \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\, dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dy.$$

Calcolare $\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 108. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$$

e la 1*-forma*

$$\alpha = \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\, dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dy.$$

Calcolare $\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 109. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$$

e la 1-forma

$$\alpha = x\,dx + y\,dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 110. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$$

e la 1-forma

$$\alpha = y\,dx + x\,dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 111. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

e la 1-forma

$$\alpha = x\,dx - x\,dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 112. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

e la 1-forma

$$\alpha = y\,dx - \ dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 113. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

e la 1-forma

$$\alpha = (x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 114. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

e la 1-forma

$$\alpha = x\,dx + y\,dy + z\,dz.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 115. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

e la 1-forma

$$\alpha = y\,dx + x\,dy + z\,dz.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 116. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, t^2)$$

e la 1-forma

$$\alpha = x\,dx + y\,dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 117. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, t^2)$$

e la 1*-forma*

$$\alpha = x\,dy.$$

Calcolare $\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 118. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, t^4)$$

e la 1*-forma*

$$\alpha = y\,dx - y\,dy.$$

Calcolare $\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 119. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, e^t)$$

e la 1*-forma*

$$\alpha = x^2\,dx - y\,dy.$$

Calcolare $\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 120. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, t^2)$$

e la funzione

$$F(x,y) = x.$$

Calcolare $\int_\gamma F$.

Esercizio 121. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, t^2)$$

e la funzione

$$F(x,y) = \frac{y}{x}.$$

Calcolare $\int_\gamma F$.

Esercizio 122. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, e^t)$$

e la funzione

$$F(x,y) = y.$$

Calcolare $\int_\gamma F$.

Esercizio 123. *Consideriamo la curva*

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, \sin t)$$

e la funzione

$$F(x,y) = \sin(2x).$$

Calcolare $\int_\gamma F$.

Esercizio 124. *Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza (in senso antiorario) il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Sia F la funzione

$$F(x, y) = xy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 125. *Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza (in senso antiorario) il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Sia F la funzione

$$F(x, y) = x.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 126. *Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza (in senso antiorario) il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Sia F la funzione

$$F(x, y) = |x|.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 127. *Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza (in senso antiorario) il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Sia F la funzione

$$F(x, y) = e^x \sin y.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 128. *Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza (in senso antiorario) il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq x.$$

Sia F la funzione

$$F(x, y) = x.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 129. *Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza (in senso antiorario) il bordo del rettangolo*

$$[0, 2] \times [0, 3]$$

Sia F la funzione

$$F(x, y) = e^x.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 130. *Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza (in senso antiorario) il bordo del rettangolo*

$$[0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

Sia F la funzione

$$F(x, y) = \cos x.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 131. *Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza (in senso antiorario) il bordo del rettangolo*

$$[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

Sia F la funzione

$$F(x,y)=\cos(x+y).$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 132. *Sia γ la curva semplice che parametrizza il segmento che collega i punti*

$$(1,3)\qquad e\qquad (2,4)$$

Sia F la funzione

$$F(x,y)=xy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 133. *Sia γ la curva semplice che parametrizza il segmento che collega i punti*

$$(-1,1)\qquad e\qquad (2,2)$$

Sia F la funzione

$$F(x,y)=x^2+y^2.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 134. *Sia γ la curva semplice che parametrizza il segmento che collega i punti*

$$(-1,-1)\qquad e\qquad (0,2)$$

Sia α la 1-forma

$$\alpha=x\,dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 135. *Sia γ la curva semplice che parametrizza il segmento che collega i punti*

$$(-1,-1)\qquad e\qquad (0,2)$$

ed è tale che

$$\gamma(0)=(-1,-1)\qquad e\qquad \gamma(1)=(0,2)$$

Sia α la 1-forma

$$\alpha=x\,dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 136. *Sia γ la curva semplice che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<1.$$

Calcolare la lunghezza di γ.

Esercizio 137. *Sia γ la curva semplice che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<1.$$

Sia F la funzione

$$F(x,y)=x$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 138. *Sia γ la curva semplice che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<1.$$

Sia α la 1-forma

$$\alpha=x\,dx$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 139. *Sia γ la curva semplice che parametrizza in senso antiorario il bordo dell'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<1.$$

Sia α la 1-forma

$$\alpha = (y+e^x)\,dx - e^y\,dy$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 140. *Sia γ la curva semplice che parametrizza in senso antiorario il bordo dell'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y>1,\ x^2+y^2<1.$$

Sia α la 1-forma

$$\alpha = (y+\cos(2x))\,dx$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 141. *Sia γ la curva semplice che parametrizza l'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2=1.$$

Sia F la funzione

$$F(x,y) = \frac{2x}{1+y}$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 142. *Sia γ la curva semplice che parametrizza in senso antiorario il bordo dell'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x>0,\ y>0,\ x+y<1.$$

Sia F la funzione

$$F(x,y) = x^2+y^2$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 143. *Sia γ la curva semplice che parametrizza in senso antiorario il bordo dell'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x>0,\ y>0,\ x+y<1.$$

Sia α la 1-forma

$$\alpha = x^3\,dx + (x+y^2)\,dy$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 144. *Quale delle curve seguenti è una curva semplice chiusa che parametrizza in senso orario la circonferenza di centro $(1,2)$ e raggio 2.*

(a) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = 2\big(\cos(t+1), \sin(t+2)\big)$
(b) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = 2\big(\cos(t-1), \sin(t-2)\big)$
(c) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = \sqrt{2}\big(\cos(t+1), \sin(t+2)\big)$
(d) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = \sqrt{2}\big(\cos(t-1), \sin(t-2)\big)$
(e) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = 2\big(\cos t-1, \sin t-2\big)$
(f) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = 2\big(\cos t+1, \sin t+2\big)$
(g) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = \sqrt{2}\big(\cos t-1, \sin t-2\big)$
(h) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = \sqrt{2}\big(\cos t+1, \sin t+2\big)$

Esercizio 145. *Quale delle curve seguenti è una curva semplice chiusa che parametrizza in senso orario la circonferenza di centro $(-1,1)$ e raggio 3.*

(a) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = 3\big(\cos(t-1), \sin(t+1)\big)$
(b) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = 3\big(\cos(t+1), \sin(t-1)\big)$
(c) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = \sqrt{3}\big(\cos(t+1), \sin(t-1)\big)$
(d) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = \sqrt{3}\big(\cos(t-1), \sin(t+1)\big)$
(e) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \gamma(t) = 3\big(\cos t-1, \sin t+1\big)$

(f) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = 3\big(\cos t + 1, \sin t - 1\big)$
(g) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \sqrt{3}\big(\cos t - 1, \sin t + 1\big)$
(h) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \sqrt{3}\big(\cos t + 1, \sin t - 1\big)$

Esercizio 146. *Sia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un punto fissato. Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza in senso orario la circonferenza di centro (a, b) e raggio 1.*

Sia F la funzione

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

Calcolare l'integrale

$$I(a, b) := \int_\gamma F$$

in funzione delle coordiante $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) *La funzione I ha un minimo locale in zero.*
(b) *La funzione I ha un massimo locale in zero.*
(c) *Il punto $(0, 0)$ è un punto critico per I, ma $(0, 0)$ non è un punto ne di massimo, ne di minimo.*
(d) *La matrice Hessiana di I è definita positiva nel punto $(0, 0)$.*
(e) *La matrice Hessiana di I è definita negativa nel punto $(0, 0)$.*

Esercizio 147. *Sia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un punto fissato. Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza in senso orario la circonferenza di centro (a, b) e raggio 1.*

Sia F la funzione

$$F(x, y) = x^2 - y^2$$

Calcolare l'integrale

$$I(a, b) := \int_\gamma F$$

in funzione delle coordiante $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) *La funzione I ha un minimo locale in zero.*
(b) *La funzione I ha un massimo locale in zero.*
(c) *Il punto $(0, 0)$ è un punto critico per I, ma $(0, 0)$ non è un punto ne di massimo, ne di minimo.*
(d) *La matrice Hessiana di I è definita positiva nel punto $(0, 0)$.*
(e) *La matrice Hessiana di I è definita negativa nel punto $(0, 0)$.*

Esercizio 148. *Sia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un punto fissato. Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza in senso orario la circonferenza di centro (a, b) e raggio 1.*

Sia F la funzione

$$F(x, y) = xy$$

Calcolare l'integrale

$$I(a, b) := \int_\gamma F$$

in funzione delle coordiante $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) *La funzione I ha un minimo locale in zero.*
(b) *La funzione I ha un massimo locale in zero.*
(c) *Il punto $(0, 0)$ è un punto critico per I, ma $(0, 0)$ non è un punto ne di massimo, ne di minimo.*
(d) *La matrice Hessiana di I è definita positiva nel punto $(0, 0)$.*
(e) *La matrice Hessiana di I è definita negativa nel punto $(0, 0)$.*

Esercizio 149. *Sia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un punto fissato. Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza in senso orario la circonferenza di centro (a, b) e raggio 1.*

Sia F la funzione

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + x - y$$

Calcolare l'integrale

$$I(a, b) := \int_\gamma F$$

in funzione delle coordiante $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) *La funzione* I *ha un minimo locale in zero.*
(b) *La funzione* I *ha un massimo locale in zero.*
(c) *Il punto* $(0,0)$ *è un punto critico per* I*, ma* $(0,0)$ *non è un punto ne di massimo, ne di minimo.*
(d) *La matrice Hessiana di* I *è definita positiva nel punto* $(0,0)$.
(e) *La matrice Hessiana di* I *è definita negativa nel punto* $(0,0)$.

Esercizio 150. *Sia* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *un punto fissato. Sia* γ *la curva semplice chiusa che parametrizza in senso orario la circonferenza di centro* (a,b) *e raggio* 1.

Sia F *la funzione*

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + xy$$

Calcolare l'integrale

$$I(a,b) := \int_\gamma F$$

in funzione delle coordiante $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) *La funzione* I *ha un minimo locale in zero.*
(b) *La funzione* I *ha un massimo locale in zero.*
(c) *Il punto* $(0,0)$ *è un punto critico per* I*, ma* $(0,0)$ *non è un punto ne di massimo, ne di minimo.*
(d) *La matrice Hessiana di* I *è definita positiva nel punto* $(0,0)$.
(e) *La matrice Hessiana di* I *è definita negativa nel punto* $(0,0)$.

Esercizio 151. *Sia* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *un punto fissato. Sia* γ *la curva semplice chiusa che parametrizza il segmento che collega i punti* $(a-1,b)$ *e* $(a+1,b)$.

Sia F *la funzione*

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

Calcolare l'integrale

$$I(a,b) := \int_\gamma F$$

in funzione delle coordiante $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) *La funzione* I *ha un minimo locale in zero.*
(b) *La funzione* I *ha un massimo locale in zero.*
(c) *Il punto* $(0,0)$ *è un punto critico per* F*, ma* $(0,0)$ *non è un punto ne di massimo, ne di minimo.*
(d) *La matrice Hessiana di* I *è definita positiva nel punto* $(0,0)$.
(e) *La matrice Hessiana di* I *è definita negativa nel punto* $(0,0)$.

Esercizio 152. *Sia* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *un punto fissato. Siano* γ_1 *e* γ_2 *le curve*

- γ_1 *la curva semplice chiusa che parametrizza il segmento che collega i punti* $(a-1,b)$ *e* $(a+1,b)$.
- γ_2 *la curva semplice chiusa che parametrizza il segmento che collega i punti* $(a,b-1)$ *e* $(a,b+1)$.

Sia F *la funzione*

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

Calcolare l'integrale

$$I(a,b) := \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F$$

in funzione delle coordiante $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) *La funzione* I *ha un minimo locale in zero.*
(b) *La funzione* I *ha un massimo locale in zero.*
(c) *Il punto* $(0,0)$ *è un punto critico per* I*, ma* $(0,0)$ *non è un punto ne di massimo, ne di minimo.*
(d) *La matrice Hessiana di* I *è definita positiva nel punto* $(0,0)$.
(e) *La matrice Hessiana di* I *è definita negativa nel punto* $(0,0)$.

Esercizio 153. *Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza il segmento che collega i punti $\Big(a-1,(a-1)^2\Big)$ e $\Big(a+1,(a+1)^2\Big)$.*

Sia F la funzione

$$F(x,y) = y$$

Calcolare l'integrale

$$I(a) := \int_\gamma F$$

in funzione del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) *La funzione I ha un minimo locale in zero.*
(b) *La funzione I ha un massimo locale in zero.*
(c) *Il punto 0 è un punto critico per I, ma 0 non è un punto ne di massimo, ne di minimo.*
(d) *La derivata seconda di I è positiva in 0.*
(e) *La derivata seconda di I è negativa in 0.*

Integrali doppi

Esercizio 154. *Calcolare l'area dell'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq 1$$

Esercizio 155. *Calcolare l'area dell'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq x$$

Esercizio 156. *Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Sia γ la curva che parametrizza il segmento che collega i punti $A = \Big(a-1,(a-1)^2\Big)$ e $B = \Big(a+1,(a+1)^2\Big)$. Sia Ω l'insieme limitato con bordo parametrizzato da γ e dalla porzione del grafico della funzione $f(x) = x^2$ compresa fra i punti A e B.*

Calcolare l'area $V(a)$ di Ω in funzione del parametro a.

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) *La funzione V ha un minimo locale in zero.*
(b) *La funzione V ha un massimo locale in zero.*
(c) *Il punto 0 è un punto critico per V, ma 0 non è un punto ne di massimo, ne di minimo.*
(d) *La derivata seconda di V è positiva in 0.*
(e) *La derivata seconda di V è negativa in 0.*

Esercizio 157. *Sia Ω l'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq x$$

Calcolare il momento

$$\iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Esercizio 158. *Sia Ω l'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq 1$$

Calcolare

$$\iint_\Omega y\,dx\,dy$$

Esercizio 159. *Sia Ω l'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq 1$$

Calcolare

$$\iint_\Omega y\,dx\,dy$$

Esercizio 160. *Sia Ω l'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq x$$

Calcolare

$$\iint_\Omega y \, dx \, dy$$

Esercizio 161. *Calcolare*

$$\iint_{B_1} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

Esercizio 162. *Calcolare in funzione del pararmetro $a > 0$*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

Esercizio 163. *Sia Ω l'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di $a > 0$ e $b > 0$ l'integrale

$$\iint_\Omega 1 \, dx \, dy$$

Esercizio 164. *Sia Ω l'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di $a > 0$ e $b > 0$ l'integrale

$$\iint_\Omega (x + 2y) \, dx \, dy$$

Esercizio 165. *Sia Ω l'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di $a > 0$ e $b > 0$ l'integrale

$$\iint_\Omega x^2 \, dx \, dy$$

Esercizio 166. *Sia Ω l'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di $a > 0$ e $b > 0$ l'integrale

$$\iint_\Omega (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

Esercizio 167. *Sia Ω l'insieme*

$$[0,1] \times [1,2]$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega xy \, dx \, dy$$

Esercizio 168. *Sia Ω l'insieme*

$$[0,1] \times [0,1]$$

Calcolare gli integrali

$$I_1 = \iint_\Omega x \, dx \, dy$$
$$I_2 = \iint_\Omega xy \, dx \, dy$$
$$I_3 = \iint_\Omega x^2 \, dx \, dy$$

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) $I_1 \leq I_2 \leq I_3$
(b) $I_1 \leq I_3 \leq I_2$
(c) $I_2 \leq I_1 \leq I_3$
(d) $I_2 \leq I_3 \leq I_1$
(e) $I_3 \leq I_1 \leq I_2$

(f) $I_3 \le I_2 \le I_1$

Esercizio 169. *Siano* Ω_1, Ω_2 *e* Ω_3 *gli insiemi*

$$\Omega_1 = [0,1] \times [0,4]$$
$$\Omega_2 = [0,2] \times [0,2]$$
$$\Omega_3 = [0,4] \times [0,1]$$

Calcolare gli integrali

$$I_1 = \iint_{\Omega_1} xy\, dx\, dy$$
$$I_2 = \iint_{\Omega_2} xy\, dx\, dy$$
$$I_3 = \iint_{\Omega_3} xy\, dx\, dy$$

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) $I_1 \le I_2 \le I_3$
(b) $I_1 \le I_3 \le I_2$
(c) $I_2 \le I_1 \le I_3$
(d) $I_2 \le I_3 \le I_1$
(e) $I_3 \le I_1 \le I_2$
(f) $I_3 \le I_2 \le I_1$

Esercizio 170. *Per ogni numero reale* $a > 0$ *definiamo l'insieme*

$$\Omega_a = [0,a] \times [0, \frac{1}{a}]$$

Calcolare in funzione di a *l'integrale*

$$I(a) = \iint_{\Omega_1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Quale delle affermazioni seguenti è vera ?

(a) $\lim_{a \to 0^+} I(a) = 0$.
(b) $\lim_{a \to 0^+} I(a) = +\infty$.
(c) $\lim_{a \to 0^+} I(a)$ *è un numero reale positivo.*
(d) $\lim_{a \to 0^+} I(a)$ *non esiste.*
(e) *La funzione* I *ha un solo punto critico in* $(0, +\infty)$.
(f) *La funzione* I *ha almeno due punti critici in* $(0, +\infty)$.
(g) *La funzione* I *non ha punti critici in* $(0, +\infty)$.