Prova scritta - appello di giugno 2020

Esercizio 1. *In $\mathbb{R}^2$, l'insieme $\overline{B}_1 \setminus B_1(1,0)$ è*

(a) aperto
(b) chiuso
(c) compatto
(d) stellato rispetto a $(1,0)$
(e) stellato rispetto a $(0,1)$
(f) connesso per archi

Esercizio 2 (1 p.). *Quali fra gli seguenti insiemi sono aperti ?*

(a) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(B_1 \setminus (\frac{1}{n},0)\Big)$ *dove B_1 è la palla centrata in zero di raggio 1*
(b) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(B_1 \setminus (\frac{1}{n},0)\Big)$ *dove B_1 è la palla centrata in zero di raggio 1*
(c) $B_1 \setminus (\frac{1}{3},0)$ *dove B_1 è la palla centrata in zero di raggio 1*
(d) $B_1 \setminus \Big((2t,t)\in\mathbb{R}^2 \ : \ t\geq 0\Big)$ *dove B_1 è la palla centrata in zero di raggio 1*
(e) $B_1 \setminus \Big((t,3t)\in\mathbb{R}^2 \ : \ t> 0\Big)$ *dove B_1 è la palla centrata in zero di raggio 1*
(f) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(B_1(n,0)\Big)$ *dove $B_1(n,0)$ è la palla di raggio 1 centrata nel punto $(n,0)$*
(g) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(B_1(n,0)\Big)$ *dove $B_1(n,0)$ è la palla di raggio 1 centrata nel punto $(n,0)$*

Esercizio 3 (1 p.). (a) *l'intersezione tra un chiuso C è un compatto K è un compatto*
(b) *l'intersezione tra un chiuso C è un compatto K è un chiuso*
(c) *l'unione tra un chiuso C è un compatto K è un compatto*
(d) *l'unione tra un chiuso C è un compatto K è un chiuso*
(e) *se per ogni $R>0$, l'insieme $\overline{B}_R \cap K$ è compatto, allora K è compatto.*
(f) *se per ogni $R>0$, linsieme $\overline{B}_R \cap K$ è compatto, allora K è chiuso.*
(g) *se per ogni $R>0$, linsieme $\overline{B}_R \cap K$ è chiuso, allora K è chiuso.*

Esercizio 4 (2 p.). *Dato un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^d$, ricordiamo che :*

- $\overline{\Omega}$ *la chiusura di Ω,*
- $\mathrm{int}(\Omega)$ *la parte interna di Ω,*
- $\partial\Omega$ *il bordo di Ω.*

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) $\mathrm{int}(\Omega\cup B_1) = \mathrm{int}(\Omega)\cup\mathrm{int}(B_1)$
(b) $\partial(\Omega\cup B_1) = \partial\Omega\cup\partial B_1$
(c) $\overline{\Omega\cup B_1} = \overline{\Omega}\cup\overline{B}_1$
(d) $\mathrm{int}(\Omega\cap B_1) = \mathrm{int}(\Omega)\cap\mathrm{int}(B_1)$
(e) $\partial(\Omega\cap B_1) = \partial\Omega\cap\partial B_1$
(f) $\overline{\Omega\cap B_1} = \overline{\Omega}\cap\overline{B}_1$

Esercizio 5 (2 p.). *Dato un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^d$, ricordiamo che :*

- $\overline{\Omega}$ *la chiusura di Ω,*
- $\mathrm{int}(\Omega)$ *la parte interna di Ω,*
- $\partial\Omega$ *il bordo di Ω.*

Dati due sottoinsiemi Ω_1 e Ω_2 di $\mathbb{R}^d$ indicare quali fra le affermazioni seguenti sono sicuramente vere.

(a) $\text{int}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \text{int}(\Omega_1) \cup \text{int}(\Omega_2)$
(b) $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$
(c) $\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$
(d) $\text{int}(\Omega_1 \setminus \Omega_2) = \text{int}(\Omega_1) \setminus \text{int}(\Omega_2)$
(e) $\partial(\Omega_1 \setminus \Omega_2) = \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_2$
(f) $\overline{\Omega_1 \setminus \Omega_2} = \overline{\Omega}_1 \setminus \overline{\Omega}_2$

Esercizio 6. *Sia* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *la curva*

$$\gamma(t) = \Big(t + t^2 + \cos(t + t^2)\,,\ \sin(2t - 3t^2)\Big),$$

e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$F(x, y) = x - y + xy + x^2y^2.$$

Calcolare la derivata della funzione composta

$$(F \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

(a) $(F \circ \gamma)'(0) = 1$
(b) $(F \circ \gamma)'(0) = -1$
(c) $(F \circ \gamma)'(0) = 0$
(d) $(F \circ \gamma)'(0) = 2$
(e) $(F \circ \gamma)'(0) = -2$
(f) $(F \circ \gamma)'(0) = 4$
(g) $(F \circ \gamma)'(0) = -4$

Esercizio 7. *Sia* F *la funzione*

$$F(x, y) = 4x - y + xy - y^2 - 2x^2.$$

Il massimo di F *sull'insieme*

$$\Omega = \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y \geq 0\Big)$$

è raggiunto nel punto

(a) $(1, 0)$
(b) $(1, 1)$
(c) $(1, 2)$
(d) $(2, 1)$
(e) $(0, 3)$
(f) $(-1, 0)$
(g) $(-2, 0)$
(h) $(2, 0)$
(i) $(0, 0)$

Esercizio 8 (2 p.)**.** *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2 + y^6} & se \ \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad se \ \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e la curva

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad , \qquad \gamma(t) = (t^3, t).$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
(c) Il gradiente di F *in zero non è definito.*
(d) La funzione composta $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è derivabile in zero e* $(F \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0) \cdot \nabla F(0, 0)$.
(e) La funzione F *è differenziabile in zero.*

(f) *Per ogni* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$*, la funzione* $f(t)=F(ta,tb)$ *è derivabile in zero e*
$$f'(0)=0.$$
(g) F *è continua in zero.*
(h) *Per ogni* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$*, la funzione* $f(t)=F(ta,tb)$ *è derivabile in zero e*
$$f'(0)=\frac{ab^4}{a^2+b^6}$$

Esercizio 9. Quali delle seguenti funzioni hanno un **massimo** locale in zero ?
(a) $F(x,y)=2x^2-y^2+xy$
(b) $F(x,y)=-2x^2-y^2-3xy$
(c) $F(x,y)=-2x^2-y^2+xy$
(d) $F(x,y)=2x^2+y^2-xy$
(e) $F(x,y)=\cos x\cos y$
(f) $F(x,y)=\cos x\cos(x+y)$
(g) $F(x,y)=\sin^2 x+\cos y$

Esercizio 10 (2 p.)**.** *Calcolare* $d(x^2)\wedge d(xy)$*.*
(a) $d(x^2)\wedge d(xy)=0$
(b) $d(x^2)\wedge d(xy)=2x\,dx+x\,dy$
(c) $d(x^2)\wedge d(xy)=x\,dy$
(d) $d(x^2)\wedge d(xy)=2xy\,dx\wedge dy$
(e) $d(x^2)\wedge d(xy)=2xy\,dy\wedge dx$
(f) $d(x^2)\wedge d(xy)=2x^2\,dx\wedge dy$
(g) $d(x^2)\wedge d(xy)=2x^2\,dy\wedge dx$

Esercizio 11 (2 p.)**.** *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$*. Quali affermazioni sono vere ?*
(a) *Per ogni coppia di funzioni* $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *e* $g:\Omega\to\mathbb{R}$ *si ha*
$$df\wedge dg=d(fg)$$
(b) *Per ogni coppia di funzioni* $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *e* $g:\Omega\to\mathbb{R}$ *si ha*
$$df\wedge dg=\det\begin{pmatrix}\partial_x f & \partial_y f\\ \partial_x g & \partial_y g\end{pmatrix}dx\wedge dy$$
(c) *Per ogni coppia di funzioni* $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *e* $g:\Omega\to\mathbb{R}$ *si ha*
$$d(fg)=\det\begin{pmatrix}\partial_x f & \partial_y f\\ \partial_x g & \partial_y g\end{pmatrix}dx\wedge dy$$
(d) *Per ogni coppia di funzioni* $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *e* $g:\Omega\to\mathbb{R}$ *si ha*
$$df\wedge dg=f\,dg+g\,df$$
(e) *Per ogni coppia di funzioni* $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *e* $g:\Omega\to\mathbb{R}$ *si ha*
$$d(fg)=f\,dg+g\,df$$
(f) *Per ogni coppia di funzioni* $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *e* $g:\Omega\to\mathbb{R}$ *si ha*
$$d(fdg)=df\wedge dg$$
(g) *Per ogni coppia di funzioni* $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *e* $g:\Omega\to\mathbb{R}$ *si ha*
$$d(gdf)=df\wedge dg$$

Esercizio 12 (2 p.)**.** *Quali fra le seguenti forme differenziali sono chiuse.*
(a) $e^x\,dx+e^y\,dy$
(b) $e^{xy}\,dx+e^{xy}\,dy$
(c) $ye^x\,dx+xe^y\,dy$

(d) $ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy$
(e) $xe^{x}\,dx + ye^{y}\,dy$

Esercizio 13 (2 p.). *Sia B_1 la palla di centro zero e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\,,\ \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^3} \right)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

(a) $I = \pi$
(b) $I = 2\pi$
(c) $I = 3\pi$
(d) $I = -\pi$
(e) $I = -2\pi$
(f) $I = -3\pi$
(g) $I = \dfrac{\pi}{2}$
(h) $I = -\dfrac{\pi}{2}$
(i) $I = 0$

Esercizio 14. *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ -1 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le x^2+1 \Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Sia α la 1-forma

$$\alpha = (x^2 - 2xy)\,dx + (y^3 + x)\,dy.$$

Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \alpha.$$

(a) $I = \dfrac{2}{3}$
(b) $I = -\dfrac{2}{3}$
(c) $I = \dfrac{1}{3}$
(d) $I = -\dfrac{1}{3}$
(e) $I = \dfrac{4}{3}$
(f) $I = -\dfrac{4}{3}$
(g) $I = \dfrac{8}{3}$
(h) $I = -\dfrac{8}{3}$
(i) $I = 0$

Esercizio 15 (3 p.). *Sia B_1 la palla di raggio 1 e centro zero in $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'area della superficie parametrica S determinata dalla mappa $\Phi : B_1 \to \mathbb{R}^3$, dove*

$$\Phi(s,t) = \big(s\,,\ t\,,\ s^2+t^2\big).$$

Calcolare

$$\operatorname{Area}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} 1.$$

(a) $\text{Area}(\mathcal{S}) = \dfrac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right)$

(b) $\text{Area}(\mathcal{S}) = \dfrac{\pi}{3}\left(5^{3/2} - 1\right)$

(c) $\text{Area}(\mathcal{S}) = \dfrac{\pi}{12}\left(5^{3/2} - 1\right)$

(d) $\text{Area}(\mathcal{S}) = \dfrac{\pi}{4}\left(5^{3/2} - 1\right)$

(e) $\text{Area}(\mathcal{S}) = \dfrac{\pi}{6}\left(5^{1/2} - 1\right)$

(f) $\text{Area}(\mathcal{S}) = \dfrac{\pi}{3}\left(5^{1/2} - 1\right)$

(g) $\text{Area}(\mathcal{S}) = \dfrac{\pi}{12}\left(5^{1/2} - 1\right)$

(h) $\text{Area}(\mathcal{S}) = \dfrac{\pi}{4}\left(5^{1/2} - 1\right)$