# Derivate parziali

**Definizione 1.** *Sia $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

*(i) Diciamo che la funzione $f$ è derivabile nel punto $x \in \Omega$, se esistono le derivate parziali*

$$\partial_{x_i} f(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_d) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_d)}{h} \ ,$$

*per ogni $i = 1, \dots, d$. Per le derivate parziali di $f$ sono comunemente usate le seguenti notazioni:*

$$\partial_{x_i} f = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

*Il vettore con coordinate $\partial_i f(x)$, $i = 1, \dots, d$, è detto* **gradiente** *di $f$ nel punto $x$*

$$\nabla f(x) := \big(\partial_{x_1} f(x), \partial_{x_2} f(x), \dots, \partial_{x_i} f(x), \dots, \partial_{x_d} f(x)\big) \in \mathbb{R}^d.$$

*(ii) Diciamo che funzione $f$ è derivabile in $\Omega$, se lo è in ogni punto $x \in \Omega$.*

*(iii) Diciamo che la funzione $f$ è di classe $C^1$, e scriviamo $f \in C^1(\Omega)$, se $f$ è derivabile in $\Omega$ e le sue derivate parziali $\partial_{x_i} f$, $i = 1, \dots, d$, sono funzioni continue su $\Omega$.*

*(iv) Diciamo che la funzione $f$ è di classe $C^2$, e scriviamo $f \in C^2(\Omega)$, se $f \in C^1(\Omega)$; per ogni $i = 1, \dots, d$ le funzioni $\partial_{x_i} f : \Omega \to \mathbb{R}$ sono derivabili in $\Omega$ e le derivate parziali $\partial_{x_j}\partial_{x_i} f$ sono funzioni continue su $\Omega$, per ogni $i = 1, \dots, d$ e $j = 1, \dots, d$.*

**Proposizione 2** (Operazioni algebriche con le derivate parziali)**.** *La somma e il prodotto di funzioni derivabili sono funzioni derivabili. Inoltre, valgono le identita seguenti*

$$\partial_i(u + v) = \partial_i u + \partial_i v \qquad e \qquad \partial_i(uv) = u\partial_i v + v\partial_i u \ .$$

**Esempio 3** (Derivabile in $x \Rightarrow$ continua in $x$ ?)**.** *Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile in zero e tale che*

$$f(0, 0) = \partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0,$$

*che non sia continua in zero.*

**Teorema 4** (Funzioni con gradiente nullo)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto connesso. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che*

$$\partial_{x_i} f(x) = 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega \quad \text{ed ogni} \quad i = 1, \dots, d,$$

*allora $f$ è costante in $\Omega$.*

**Teorema 5** (Funzioni composte)**.** *Siano $\omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ due insiemi aperti, $x_0 \in \omega$ un punto e $F : \omega \to \Omega$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che:*

- *$F(x_0) \in \Omega$;*
- *$F$ è continua e derivabile in $x_0$;*
- *$u \in C^1(\Omega)$.*

*Allora, la funzione composta*

$$u \circ F : \omega \to \mathbb{R}$$

*è derivabile in $x_0$ e per ogni $i = 1, \dots, d$ si ha*

$$\partial_i(u \circ F)(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u\big(F(x)\big)\partial_i F_j(x).$$

**Teorema 6** (Teorema di Schwarz)**.** *Siano $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$, $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\Omega$ e tale che $\partial_{ij} f$ e $\partial_{ji} f$ sono continue in $x_0$. Allora*

$$\partial_{ij} f(x_0) = \partial_{ji} f(x_0).$$

**Dimostrazione:** Supponiamo che $d = 2$ e $x_0 = (x, y)$. Per ogni $h, k \in \mathbb{R}$, consideriamo l'espressione

$$u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y).$$

Fissati $y$ e $k$, la funzione

$$f(t) = u(t, y+k) - u(t, y)$$

è derivabile in $t$ ed esiste $h' \in (0, h)$ tale che

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y) &= f(x+h) - f(x) \\ &= h f'(x+h') \\ &= h\Big(\partial_x u(x+h', y+k) - \partial_x u(x+h', y)\Big). \end{aligned}$$

Utilizzando di nuovo il teorema di Lagrange, si ha

$$\partial_x u(x+h', y+k) - \partial_x u(x+h', y) = k\, \partial_y \partial_x u(x+h', y+k'),$$

per un qualche $k' \in (0, k)$. Quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y)}{hk} = \partial_y \partial_x u(x, y).$$

Ora, fissiamo $x$ e $k$ e consideriamo la funzione

$$g(s) = u(x+h, s) - u(x, s).$$

Ora, per ogni $k$, esiste $k'' \in (0, k)$ tale che

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y) &= g(y+k) - g(y) \\ &= k\, g'(y+k'') \\ &= k\Big(\partial_y u(x+h, y+k'') - \partial_y u(x, y+k'')\Big). \end{aligned}$$

Come sopra, esiste $h'' \in (0, h)$ tale che

$$\partial_y u(x+h, y+k'') - \partial_y u(x, y+k'') = h\, \partial_x \partial_y u(x+h'', y+k''),$$

Quindi, per la continuità di $\partial_x \partial_y u$, si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y)}{hk} = \partial_x \partial_y u(x, y).$$

**Definizione 7** (Funzione differenziabile)**.** *Siano $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che $f$ è differenziabile nel punto $x \in \Omega$, se esiste una funzione lineare*

$$\alpha \cdot x = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i$$

*tale che*

$$f(x+h) = f(x) + \alpha \cdot h + o(|h|). \tag{$*$}$$

*Inoltre, se $f$ è differenziabile in $x$, allora $f$ è anche derivabile in $x$ e si ha che*

$$\nabla f(x) = \alpha.$$

*In particolare, possiamo riscrivere $(*)$ come*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} h_i\, \partial_i f(x) + o(|h|).$$

**Proposizione 8** (Differenziabile $\Rightarrow$ continua)**.** *Siano $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $f$ è differenziabile nel punto $x \in \Omega$, allora $f$ è continua in $x$.*

**Teorema 9** (Teorema del differenziale)**.** *Siano $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $\Omega$. Se le derivate parziali $\partial_i f : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$, sono continue in $x$, allora $f$ è differenziabile in $x$.*

**Dimostrazione:** Siano $d = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $f = f(x, y)$. Allora, per ogni $(h, k)$, esistono $h' \in (0, h)$ e $k' = (0, k)$ tali che

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x,y) &= \Big(f(x+h, y+k) - f(x+h, y)\Big) + \Big(f(x+h, y) - f(x,y)\Big) \\ &= k\, \partial_y f(x+h, y+k') + h\, \partial_x f(x+h', y). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - {}& f(x,y) - h\, \partial_x f(x,y) + k\, \partial_y f(x,y) \\ &= k \Big(\partial_y f(x+h, y+k') - \partial_y f(x,y)\Big) + h \Big(\partial_x f(x+h', y) - \partial_x f(x,y)\Big) \\ &= o\Big(\sqrt{h^2 + k^2}\Big). \end{aligned}$$

**Teorema 10** (Teorema di Taylor - ordine 2)**.** *Siano $\Omega$ un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione in $C^2(\Omega)$. Allora*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(x_0)\big(x^i - x_0^i\big) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \partial_{ij} f(x_0)\big(x^i - x_0^i\big)\big(x^j - x_0^j\big) + o\big(|x - x_0|^2\big).$$

**Dimostrazione:** Siano $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega$ e $h = (h_1, h_2, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$. Applicare il lemma seguente alla funzione $F(t) = f(x + th)$.

**Lemma 11.** *Siano $\varepsilon > 0$ e $F : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ con derivata seconda continua. Allora, esiste $\theta \in [0, 1]$ tale che*

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(0) + (1-\theta)\Big(F''(\theta) - F''(0)\Big).$$

**Dimostrazione:** Considerare la funzione

$$f(t) := F(t) - F(0) + (1-t) F'(t).$$

## Domande

(1) Funzione derivabile (in un punto, in un aperto) - definizione

(2) Funzione differenziabile (in un punto, in un aperto) - definizone

(3) Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x \in \Omega$. È vero che $f$ è anche continua in $x$? Perché?

(4) Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $x \in \Omega$. È vero che $f$ è anche continua in $x$? Perché?

(5) Enunciare e dimostrare il Teorema di Taylor al secondo ordine (in una dimensione $d$ qualsiasi).

(6) È vero che la funzione $f(x, y) = e^{xy}$ è differenziabile in zero? Perché?

(7) Scrivere lo sviluppo al secondo ordine in zero delle funzioni $f(x, y) = e^{xy-y}$ e $f(x, y) = e^{x \sin y}$.

(8) Enunciare e dimostrare il teorema del differenziale.

(9) È vero che ogni funzione derivabile in zero è anche differenziabile in zero?

(10) È vero che se $f$ è una funzione derivabile in un intorno dello zero, allora è anche differenziabile in zero?

(11) Calcolare le derivate parziali seconde della funzione $f(x, y) = e^x \sin(xy)$.

(12) Enunciare e dimostrare il teorema di Schwarz.

(13) Considerare la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & \text{se} \quad y \neq 0, \\ x & \text{se} \quad y = 0. \end{cases}$$

Dire se è vero che :

- $f$ è continua in zero;
- $f$ è derivabile in zero;
- $f$ è differenziabile in zero.

Calcolare le derivate parziali di $f$ e dire se $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono continue in zero.

(14) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un intorno dello zero e differenziabile in zero. È vero che le derivate parziali $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono continue in zero?

## Esercizi

**Esercizio 12.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che*

$$f'(t) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad t \neq 0.$$

*Dimostrare che $f'(0) = 0$.*

**Esercizio 13.** *Dire se esiste una funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f'(0) = 0$ e $f'(t) = 1$, per ogni $t \geq 0$.*

**Esercizio 14.** *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}^2$ e tale che $\nabla f$ è della forma*

$$\nabla f(x, y) = \big(\alpha(x, y), 0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Dimostrare che $f$ è della forma*

$$f(x, y) = g(x) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Esercizio 15.** *Dire se esiste una funzione derivabile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x, y) = \big(x + y^2, 0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Esercizio 16.** *Dire se esiste una funzione derivabile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x, y) = \big(xy, 1\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Esercizio 17.** *Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x, y) = \big(1, 0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Esercizio 18.** *Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x, y) = \big(0, y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Esercizio 19.** *Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x, y) = \big(x, y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Esercizio 20.** *Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x, y) = \big(y, x\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Esercizio 21.** *Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x, y) = \big(x^2, y^2\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Esercizio 22.** *Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x, y) = \big(y^2, x^2\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Esercizio 23.** *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}^2$ e tale che $\nabla f$ è della forma*

$$\nabla f(x, y) = \big(\alpha(x, y), 0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Dimostrare che la funzione $\alpha$ non dipende da $y$.*

**Esercizio 24.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e derivabile su* $\mathbb{R}^2$*. Supponiamo che esiste una funzione* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\nabla f(x,y) = g(x,y)\big(-y,x\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Dimostrare che la funzione* $f$ *è costante.*

**Esercizio 25** (L'esercizio precedente senza l'ipotesi di continuità)**.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su* $\mathbb{R}^2$ *e sia* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che*

$$\nabla f(x,y) = g(x,y)\big(-y,x\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

*È vero che* $f$ *deve essere costante?*

**Esercizio 26.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su* $\mathbb{R}^2$ *e sia* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che*

$$\nabla f(x,y) = g(x,y)\big(x,y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Dimostrare che* $f$ *è costante su ogni circonferenza*

$$\partial B_R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = R^2\big\}.$$

**Esercizio 27.** *Dire se esiste una funzione derivabile* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\nabla f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\big(x,y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Esercizio 28.** *Dire se esistono due funzioni derivabili* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ \nabla f(0,0) \neq \nabla g(0,0). \end{cases}$$

**Esercizio 29.** *Dire se esistono due funzioni derivabili* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\big\}, \\ \nabla f \neq \nabla g \quad \textit{su} \quad \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\big\}. \end{cases}$$

**Esercizio 30.** *Dire se esistono due funzioni derivabili* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \partial B_1, \\ \nabla f \neq \nabla g \quad \textit{su} \quad \partial B_1. \end{cases}$$

**Esercizio 31.** *Sia*

$$X = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0 \quad \textit{oppure} \quad y = 0\Big\}.$$

*Dire se esistono due funzioni derivabili* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus X, \\ \nabla f \neq \nabla g \quad \textit{su} \quad X. \end{cases}$$

**Esercizio 32.** *Siano* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili tali che*

$$\nabla f(x,y) = \alpha(x,y)\nabla g(x,y),$$

*per una qualche funzione* $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*. È vero che* $f = \textit{costante} \times g$ *?*

**Definizione 33.** *Siano $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $\Omega$, e $x \in \Omega$.*

- *Diciamo che $D^2 f(x) \geq 0$, se*

$$\sum_{i,j=1}^{d} h_i h_j \partial_{ij} f(x) \geq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d.$$

- *Diciamo che $D^2 f(x) > 0$, se*

$$\sum_{i,j=1}^{d} h_i h_j \partial_{ij} f(x) > 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d, \quad h \neq 0.$$

- *Diciamo che $D^2 f(x) \leq 0$, se*

$$\sum_{i,j=1}^{d} h_i h_j \partial_{ij} f(x) \leq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d.$$

- *Diciamo che $D^2 f(x) < 0$, se*

$$\sum_{i,j=1}^{d} h_i h_j \partial_{ij} f(x) < 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d, \quad h \neq 0.$$

**Teorema 34** (Massimi e minimi locali - condizioni necessarie)**.**
*Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione in $C^2(\Omega)$.*

*(i) Se $f$ ha un massimo locale nel punto $x \in \Omega$, allora*

$$\nabla f(x) = 0 \qquad \textit{e} \qquad D^2 f(x) \geq 0.$$

*(ii) Se $f$ ha un minimo locale nel punto $x \in \Omega$, allora*

$$\nabla f(x) = 0 \qquad \textit{e} \qquad D^2 f(x) \leq 0.$$

**Teorema 35** (Massimi e minimi locali - condizioni sufficienti)**.**
*Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione in $C^2(\Omega)$.*

*(i) Se*

$$\nabla f(x) = 0 \qquad \textit{e} \qquad D^2 f(x) > 0,$$

*allora $f$ ha un massimo locale nel punto $x \in \Omega$.*

*(ii) Se*

$$\nabla f(x) = 0 \qquad \textit{e} \qquad D^2 f(x) < 0,$$

*allora $f$ ha un minimo locale nel punto $x \in \Omega$.*

**Teorema 36** (Il caso $d = 2$)**.** *Siano $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione in $C^2(\Omega)$. Allora*

*(i)* $D^2 f(x, y) \geq 0$ *se e solo se*

$$\partial_{xx} f(x, y) \geq 0 \ , \quad \partial_{yy} f(x, y) \geq 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x, y)\partial_{yy} f(x, y) - \partial_{xy} f(x, y)\partial_{yx} f(x, y) \geq 0 \ .$$

*(ii)* $D^2 f(x, y) > 0$ *se e solo se*

$$\partial_{xx} f(x, y) > 0 \ , \quad \partial_{yy} f(x, y) > 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x, y)\partial_{yy} f(x, y) - \partial_{xy} f(x, y)\partial_{yx} f(x, y) > 0 \ .$$

*(iii)* $D^2 f(x, y) \leq 0$ *se e solo se*

$$\partial_{xx} f(x, y) \leq 0 \ , \quad \partial_{yy} f(x, y) \leq 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x, y)\partial_{yy} f(x, y) - \partial_{xy} f(x, y)\partial_{yx} f(x, y) \geq 0 \ .$$

*(iv)* $D^2 f(x, y) \leq 0$ *se e solo se*

$$\partial_{xx} f(x, y) < 0 \ , \quad \partial_{yy} f(x, y) < 0 \quad e \quad \partial_{xx} f(x, y)\partial_{yy} f(x, y) - \partial_{xy} f(x, y)\partial_{yx} f(x, y) > 0 \ .$$

**Teorema 37** (Teorema della funzione implicita in dimensione due)**.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^2$ che contiene l'origine $(0,0)$ e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione in $C^1(\Omega)$ tale che*

$$u(0,0) = 0 \qquad e \qquad \partial_y u(0,0) \neq 0.$$

*Allora esistono $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ e una funzione $h : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to (-\delta_0, \delta_0)$, derivabile con continuità in $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ e tale che $h(0) = 0$. Inoltre, il grafico di $h$ coincide con l'insieme di livello*

$$\mathcal{N}_u = \Big\{(x,y) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-\delta_0, \delta_0) \ : \ u(x,y) = 0\Big\},$$

*cioè, se $(x,y) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-\delta_0, \delta_0)$, allora*

$$(x,y) \in \mathcal{N}_u \quad \textit{se e solo se} \quad y = h(x).$$

**Teorema 38** (Teorema della funzione implicita in dimensione $d \geq 2$)**.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^d$ che contiene l'origine e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione in $C^1(\Omega)$ tale che*

$$u(0) = 0 \qquad e \qquad \partial_i u(0) \neq 0.$$

*Allora esistono $r_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ e una funzione $h_i : B'_{r_0} \to (-\delta_0, \delta_0)$, derivabile con continuità in $B'_{r_0}$, dove $B'_{r_0}$ è la palla di raggio $r_0$ e centro $0$ in $\mathbb{R}^{d-1}$. Inoltre, $h_i(0) = 0$ ed il grafico di $h_i$*

$$\Gamma = \Big\{(x', x_i) \in B'_{r_0} \times (-\delta_0, \delta_0) \ : \ x_i = h_i(x')\Big\}$$

*coincide con l'insieme di livello*

$$\mathcal{N}_u = \Big\{(x', x_i) \in B'_{r_0} \times (-\delta_0, \delta_0) \ : \ u(x', x_i) = 0\Big\}.$$

**Teorema 39** (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)**.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni in $C^1(\Omega)$. Sia $\mathcal{N}_g$ l'insieme*

$$\mathcal{N}_g = \Big\{x \in \Omega : \ g(x) = 0\Big\}.$$

*Se $x \in \mathcal{N}_g$ è un punto di massimo (o minimo) per la funzione $f$ sull'insieme $\mathcal{N}_g$, allora è vera una delle affermazioni seguenti :*

*(a)* $\nabla g(x) = 0$*;*

*(b) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$.*

**Esercizio 40.** *Dimostrare che per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3} \ .$$

**Esercizio 41.** *Trovare i massimi delle funzioni*

$$f(x,y,z) = xyz \ , \qquad g(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \qquad e \qquad h(x,y,z) = xy + yz + zx \ .$$

*sulla sfera*

$$\partial B_1 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1\Big\}.$$

**Esercizio 42.** *Per ogni $a > 0$ ed ogni $b > 0$, consideriamo il rettangolo*

$$\mathcal{R}_{ab} = [0,a] \times [0,b].$$

*Il perimetro e l'area di $\mathcal{R}_{ab}$ sono rispettivamente*

$$\mathrm{Per}\,(\mathcal{R}_{ab}) = 2a + 2b \qquad e \qquad \mathrm{Area}\,(\mathcal{R}_{ab}) = ab \ .$$

*Sia $P > 0$. Fra tutti i rettangoli di perimetro $P$ trovare quello con area più grande.*