Funzioni derivabili e derivate di funzioni II

I teoremi di Rolle e di Lagrange

Teorema 1 (di Rolle)**.** *Sia* $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione*

- *continua su* $[a, b]$*;*
- *derivabiule in* (a, b)*;*
- *tale che* $f(a) = f(b)$*.*

Allora esiste $c \in (a, b)$ *tale che* $f'(c) = 0$*.*

Teorema 2 (di Lagrange)**.** *Sia* $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione*

- *continua su* $[a, b]$*;*
- *derivabiule in* (a, b)*.*

Allora esiste $c \in (a, b)$ *tale che* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$*.*

Teorema 3. *Sia* (a, b) *un intervallo (limitato o non) aperto di* $\mathbb{R}$*. Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile in* (a, b) *e tale che*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad x \in (a, b).$$

Allora f *è costante.*

Corollario 4. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su* $\mathbb{R}$ *e tale che*

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Allora f *è la funzione esponenziale reale:*

$$f(x) = e^x \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Corollario 5. *Siano* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili su* $\mathbb{R}$ *e tali che*

$$\begin{cases} f'(x) = -g(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}, \\ g'(x) = f(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = 1, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

Allora f *e* g *sono le funzioni seno e coseno:*

$$f(x) = \cos x \quad \textit{e} \quad g(x) = \sin x \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}.$$