Funzioni derivabili e derivate di funzioni

Funzioni derivabili

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo aperto $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

- Sia $x \in (a, b)$. Diciamo che la funzione f è derivabile in x se esiste ed è finito il limite

$$f'(x) := \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

- Diciamo che f è derivabile su (a, b) se lo è in ogni punto $x \in (a, b)$.

Proposizione 1. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo aperto $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Se f è derivabile nel punto $x \in (a, b)$, allora f è anche continua in x.*

Proposizione 2. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo aperto $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in (a, b)$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(1) f è derivabile in x_0.

(2) Esiste una costante $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(y) = f(x) + a(y - x) + \varepsilon(y - x),$$

dove ε è la funzione definita come

$$\varepsilon(h) = f(x + h) - f(x) - ah$$

ed è tale che

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0.$$

In questo caso si ha che $a = f'(x)$.

Teorema 3. *Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni definite sul intervallo aperto (a, b). Se f e g sono derivabili nel punto $x_0 \in (a, b)$, allora lo sono anche le funzioni $f + g$ e fg e si ha*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad e \qquad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Inoltre, se $g(x_0) \neq 0$, allora $g \neq 0$ in un intorno di x_0, la funzione $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)f(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Teorema 4. *Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora la funzione $f(x) = x^n$ è deribavile su $\mathbb{R}$ e si ha*

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad per\ ogni \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 5. *Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora la funzione $f(x) = x^{1/n}$ è deribavile su $(0, +\infty)$ e si ha*

$$\big(x^{1/n}\big)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad per\ ogni \quad x \in (0, +\infty).$$

Lemma 6. *Per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| \leq 1$ si ha la stima*

$$\big|e^z - 1 - z\big| \leq (e - 2)|z|^2.$$

Teorema 7. *La funzione esponenziale reale* $f(x) = e^x$ *è derivabile su* $\mathbb{R}$ *e si ha*

$$(e^x)' = e^x \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lemma 8. *Usando Lemma* 6*, dimostrare che*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Teorema 9. *Le funzioni* $\sin x$ *e* $\cos x$ *sono derivabili su* $\mathbb{R}$ *e si ha*

$$(\sin x)' = \cos x \quad e \quad (\cos x)' = -\sin x \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}.$$