Regolarità $C^{1,\alpha}$ delle soluzioni. Unicità del blow-up e differenziabilità delle soluzioni

Proposizione 1. *Siano $B_\rho \subset \mathbb{R}^d$ e $v \in H^1(B_\rho)$ una funzione tale che:*

(i) *v è Lipschitz in B_ρ e $v(0) = 0$;*

(ii) *per ogni successione*

$$v_{r_n}(x) = \frac{1}{r_n} v(r_n v) \qquad \text{con} \qquad r_n \to 0,$$

esistono una funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ed una sottosuccessione v_{r_n} tali che

$$v_{r_n} \to L \quad \text{uniformemente in } B_R \quad e \quad \text{fortemente in } H^1(B_R),$$

per ogni palla $B_R \subset \mathbb{R}^d$.

(iii) *v soddisfa la seguente condizione di quasi-minimalità:*

$$\fint_{B_r} |\nabla(v-h)|^2\,dx \le Cr^\alpha \quad \text{per ogni} \quad r < \rho\,,$$

dove $C > 0$ è una costante fissata, dove h è l'estensione armonica di v in B_r:

$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_r\,, \qquad h - v \in H^1_0(B_r).$$

Allora, esiste un'unica funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{r\to 0} \|v_r - L\|_{L^\infty(B_1)} = 0 \qquad e \qquad \lim_{r\to 0} \|v_r - L\|_{H^1(B_1)}.$$

In particolare, v è differenziabile in zero.

Osservazione 2. *Osserviamo che (come abbiamo dimostrato in precedenza) l'ipotesi* (ii) *segue da* (i) *e* (iii).

Dimostrazione di Proposizione 1. Siano r ed R tali che

$$0 < r < R < \rho.$$

Inoltre, sia h l'estensione armonica di v in B_R:

$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_R\,, \qquad h - v \in H^1_0(B_R).$$

Allora, per ogni funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ abbamo che

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r^d}\int_{B_r} |\nabla(v-L)|^2\,dx\right)^{1/2} &\le \left(\frac{1}{r^d}\int_{B_r} |\nabla(v-h)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{r^d}\int_{B_r} |\nabla(h-L)|^2\,dx\right)^{1/2}\\
&\le \frac{R^{d/2}}{r^{d/2}}\left(\frac{1}{R^d}\int_{B_R} |\nabla(v-h)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{r^d}\int_{B_r} |\nabla(h-L)|^2\,dx\right)^{1/2}\\
&\le C\frac{R^{d/2}}{r^{d/2}}R^{\alpha/2} + \left(\frac{1}{r^d}\int_{B_r} |\nabla(h-L)|^2\,dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ora, siccome $h - L$ è l'estensione armonica di $v - L$ in B_R abbiamo che

$$\frac{1}{r^d}\int_{B_r} |\nabla(h-L)|^2\,dx \le \frac{1}{R^d}\int_{B_R} |\nabla(h-L)|^2\,dx \le \frac{1}{R^d}\int_{B_R} |\nabla(v-L)|^2\,dx.$$

Di conseguenza,

$$\left(\frac{1}{r^d}\int_{B_r} |\nabla(v-L)|^2\,dx\right)^{1/2} \le C\frac{R^{d/2}}{r^{d/2}}R^{\alpha/2} + \left(\frac{1}{R^d}\int_{B_R} |\nabla(v-L)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Scegliendo

$$r_n := R2^{-n},$$

abbiamo che

$$\left(\frac{1}{r_{n+1}^d}\int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(v-L)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \frac{C2^{d/2}R^{\alpha/2}}{\left(2^{\alpha/2}\right)^n} + \left(\frac{1}{r_n^d}\int_{B_{r_n}} |\nabla(v-L)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Sommando su $n = 0, \ldots, N-1$, otteniamo

$$\left(\frac{1}{r_N^d}\int_{B_{r_N}} |\nabla(v-L)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \frac{C2^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-2^{-\alpha/2}} + \left(\frac{1}{R^d}\int_{B_R} |\nabla(v-L)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Sia ora $r < R$. Possiamo trovare un intero $N > 0$ tale per cui

$$R2^{-(N+1)} \le r \le R2^{-N}.$$

Quindi,

$$\left(\frac{1}{r^d}\int_{B_r} |\nabla(v-L)|^2\,dx\right)^{1/2} \le 2^{d/2}\left(\frac{C2^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-2^{-\alpha/2}} + \left(\frac{1}{R^d}\int_{B_R} |\nabla(v-L)|^2\,dx\right)^{1/2}\right),$$

che possiamo scrivere anche come

$$\left(\int_{B_1} |\nabla(v_r-L)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \frac{C2^{d}R^{\alpha/2}}{1-2^{-\alpha/2}} + 2^{d/2}\left(\int_{B_1} |\nabla(v_R-L)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

In particolare, se

$$b = \lim_{k\to\infty} v_{r_k}$$

è un qualsiasi blow-up di v, allora

$$\left(\int_{B_1} |\nabla(b-L)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \frac{C2^{d}R^{\alpha/2}}{1-2^{-\alpha/2}} + 2^{d/2}\left(\int_{B_1} |\nabla(v_R-L)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Se ora scegliamo L come un blow-up di v, allora passando al limite, otteniamo che

$$\left(\int_{B_1} |\nabla(b-L)|^2\,dx\right)^{1/2} = 0,$$

ovvero il blow-up è unico. $\square$