Regolarità $C^{1,\alpha}$ delle soluzioni. Successioni e limiti di blow-up

1. Introduzione

Setting. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^1(\Omega)$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale continuo su Ω, o più in generale in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Ricordiamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega\ ,$$

se

$$\int_\Omega \nabla v \cdot A(x)\nabla u\,dx = \int_\Omega f(x)v\,dx - \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad v \in H^1_0(\Omega),$$

dove la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

è una matrice a coefficienti variabili con le seguenti proprietà:

- i coefficienti di A sono funzioni Hölder continue:
$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici} \quad 1 \le i,j \le d.$$
- A è simmetrica:
$$a_{ij} \equiv a_{ji} \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{per} \qquad 1 \le i,j \le d,$$
- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, ovvero esistono costanti $0 < c \le C$ tali che
$$c\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C\,\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

Teorema 1 ($C^{1,\alpha}$ Schauder all'interno)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \textit{in} \quad \Omega,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\beta}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, per un qualche $\beta > 0$.*

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Osservazione 2. *Il risultato del Teorema 1 è classico ed è noto come stima $C^{1,\alpha}$ di Schauder (o anche stima debole di Schauder). Dimostrazioni alternative si possono trovare in numerosi testi, per esempio:*

[J] J. Jost. *Partial differential equations.* Springer-Verlag New York (2002).

2. Risultati preliminari

Continuità Lipschitz. Sappiamo già che la soluzione u è Lipschitz continua in Ω.

Cambio delle variabili. Per ogni $x_0 \in \Omega$, esiste una matrice $d \times s$ simmetrica $B \in S_d(\mathbb{R})$ che dipende da x_0 (scriveremo anche B_{x_0} al posto di B) ed è tale che

$$B_{x_0}A_{x_0}B_{x_0} = \mathrm{Id}.$$

La funzione

$$v(y) = u(x_0 + B_{x_0}^{-1}y)$$

è soluzione di

$$-\mathrm{div}(\widetilde{A}\,\nabla v) = g + \mathrm{div}\, G \quad \text{in} \quad B_{x_0}(-x_0 + \Omega),$$

dove $\widetilde{A}$, g e G hanno le proprietà seguenti:

- $\widetilde{A}$ è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica, a coefficienti variabili e con coefficienti in $C^{1,\alpha}$.
$$\widetilde{A}(0) = \mathrm{Id} \quad \text{ei} \quad \widetilde{A}(x) = B_{x_0}A(x_0 + B_{x_0}^{-1}x)B_{x_0} \quad \text{per ogni} \quad x \in B(\Omega)\ .$$

- g è una funzione in $L^p(B(-x_0+\Omega))$

$$g(y) = f(x_0 + B_{x_0}^{-1} y).$$

- Il campo G è $C^{0,\beta}$ su $B(-x_0+\Omega)$ ed è definito come

$$F(x) = B_{x_0}[G(B_{x_0}[x-x_0])].$$

Quasi-minimalità. Dato un insieme aperto

$$\omega \subset\subset \Omega$$

esiste un raggio universale $\rho > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \omega$ ed ogni $R \in (0,\rho)$ si ha che

$$\fint_{B_R(x_0)} |\nabla(v-h)|^2\,dx \le 4C_A R^\alpha \fint_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2\,dx + 4\Big(C_d \|f\|_{L^p(\Omega)} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big),$$

dove h è la funzione armonica

$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_R(x_0), \qquad h = v \quad \text{su} \quad \partial B_R(x_0).$$

Possiamo assumere che esistono due costanti

$$C > 0 \qquad \text{e} \qquad \alpha \in (0,1)$$

che dipendono da Ω e ρ e sono tali che

$$\fint_{B_R(x_0)} |\nabla(v-h)|^2\,dx \le C R^\alpha.$$

---

3. Differenziabilità di u

Mostreremo che u è differenziabile nel punto $x_0 = 0$.

Possiamo supporre che $u(x_0) = 0$.

Osserviamo che basta mostrare la differenziabilità di v nel punto $y_0 = 0$.

3.1. Blow-up e differenziabilità.

Per ogni $r > 0$ consideriamo la funzione

$$v_r(x) := \frac{1}{r} v(xr)$$

e osserviamo che v_r è definita sulla palla $B_{\rho/r}$. Di conseguenza, fissato un raggio $R > 0$ e scegliendo r abbastanza piccolo , in modo tale che $R < \dfrac{\rho}{r}$, la funzione v_r è definita su B_R. Inoltre, abbiamo che

$$v_r(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad |\nabla v_r| \le L \quad \text{in} \quad B_R,$$

dove L è la costante Lipschitz di v. Di conseguneza, ogni successione $r_n \to 0$ ammette una sottosuccessione $(r_n)_n$ tale che

$$v_{r_n} : B_R \to \mathbb{R}$$

converge uniformemente ad una qualche funzione

$$v_0 : B_R \to \mathbb{R}$$

tale che

$$v_0(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad |\nabla v_0| \le L \quad \text{in} \quad B_R.$$

Per un argomento di successione diagonale, abbiamo che esistono una sottosuccessione di r_n ed una funzione

$$v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

tale che

$$v_0(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad |\nabla v_0| \le L \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|v_{r_n} - v_0\|_{L^\infty(B_R)} = 0 \quad \text{per ogni} \quad R > 0.$$

Definizione 3 (Blow-up)**.** *La funzione v_0 è detta blow-up di v in 0. (Osserviamo che v_0 dipende dalla successione v_{r_n}. Infatti, a successioni diverse potrebbero corrispondere blow-up diversi.)*

3.2. **Quasi-minimalità di v_r.** Fissiamo un raggo $R > 0$.
Osserviamo che per $r > 0$ abbastanza piccolo, la funzione riscalata $v_r(x) = \frac{1}{r}v(rx)$ è definita su B_R:

$$v_r \in H^1(B_R).$$

Sia $h_r \in H^1(B_R)$ la funzione armonica in B_R con dato al bordo u_r, ovvero

$$\Delta h_r = 0 \quad \text{in} \quad B_R\,, \qquad h_r - v_r \in H^1_0(B_R).$$

Allora, è immediato verificare che

$$\fint_{B_R} |\nabla(v_r - h_r)|^2\,dx = \fint_{B_{rR}} |\nabla(v - h)|^2\,dx,$$

dove $h \in H^1(B_{rR})$ la funzione armonica in B_{rR} con dato al bordo v:

$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_{rR}\,, \qquad h - v \in H^1_0(B_{rR}).$$

Ora, usando la quasi-minimalità di v in B_{rR} si ha

$$\fint_{B_R} |\nabla(v_r - h_r)|^2\,dx = \fint_{B_{rR}} |\nabla(v - h)|^2\,dx \le Cr^\alpha R^\alpha.$$

In particolare, siccome

$$\int_{B_R} |\nabla(v_r - h_r)|^2\,dx = \int_{B_R} |\nabla v_r|^2\,dx - \int_{B_R} |\nabla h_r|^2\,dx,$$

abbiamo che

$$\int_{B_R} |\nabla v_r|^2\,dx \le \int_{B_R} |\nabla h_r|^2\,dx + Cr^\alpha R^{d+\alpha}.$$

Infine, siccome h_r minimizza l'integrale di Dirichlet in B_R, otteniamo

$$\int_{B_R} |\nabla v_r|^2\,dx \le \int_{B_R} |\nabla(v_r + \varphi)|^2\,dx + Cr^\alpha R^{d+\alpha} \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1_0(B_R),$$

che possiamo scrivere anche come

$$-2\int_{B_R} \nabla v_r \cdot \nabla\varphi\,dx \le \int_{B_R} |\nabla\varphi|^2\,dx + Cr^\alpha R^{d+\alpha} \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1_0(B_R). \tag{1}$$

3.3. **Classificazione dei blow-up.**

Osservazione 4 (Convergenza debole delle successioni di blow-up)**.** *Sia v_{r_n} una successione di blow-up che converge a v_0 uniformemente in ogni $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Inoltre, siccome $|\nabla v_{r_n}| \le L$ in B_R e $v_{r_n}(0) = 0$, abbiamo che v_{r_n} è limitata in $H^1(B_R)$. In particolare, ogni sottosuccessione ammette una sottosottosuccessione che converge debole $H^1(B_R)$ a v_0. Di conseguenza, v_{r_n} converge debole-$H^1(B_R)$ a v_0 per ogni $R > 0$.*

Lemma 5. *I blow-up della soluzione v sono funzioni armoniche su $\mathbb{R}^d$.*

Dimostrazione. Sia v_{r_n} una successione di blow-up che converge a $v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uniformemente e debole-H^1 in ogni B_R.
Fissiamo una funzione $\varphi \in H^1_0(B_R)$. Da (1) abbiamo che

$$-2\int_{B_R} \nabla v_{r_n} \cdot \nabla\varphi\,dx \le \int_{B_R} |\nabla\varphi|^2\,dx + Cr_n^\alpha R^{d+\alpha}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, otteniamo

$$-2\int_{B_R} \nabla v_0 \cdot \nabla\varphi\,dx \le \int_{B_R} |\nabla\varphi|^2\,dx.$$

Di conseguenza,

$$\int_{B_R} |\nabla v_0|^2\,dx \le \int_{B_R} |\nabla(v_0 + \varphi)|^2\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1_0(B_R).$$

e quindi v_0 è armonica in B_R. Siccome $R > 0$ è arbitrario, otteniamo che v_0 è armonica su $\mathbb{R}^d$. □

Lemma 6. *I blow-up della soluzione v sono funzioni lineari su $\mathbb{R}^d$.*

Dimostrazione. Sia $v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un blow-up di v. Allora, v_0 è armonica e lipschitziana in $\mathbb{R}^d$. In particolare, le derivate parziali $\partial_j v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sono funzioni armoniche e limitate in $\mathbb{R}^d$. Per il teorema di Liouville, le derivate parziali $\partial_j v_0$ sono costanti su $\mathbb{R}^d$. Di conseguenza, v_0 è della forma

$$v_0(x) = c + \nu \cdot x,$$

dove ν è il gradiente di v_0 in zero. Siccome, $v_0(0) = 0$, abbiamo che $c = 0$ e quindi v_0 è lineare. □

Osservazione 7. *Per mostrare la differenziabilità della funzione v in zero bisogna dimostrare che il blow-up di v in 0 è unico. Infatti, data una funzione v definita in un intorno dell'origine e tale che $v(0) = 0$, sono equivalenti:*

(i) *v è differenziabile in zero;*

(ii) *esiste una funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{r\to\infty} \|v_r - L\|_{L^\infty(B_1)} = 0.$$

3.4. **Convergenza forte delle successioni di blow-up.**

Lemma 8. *Sia $v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un blow-up di v in 0. Sia v_{r_n} una successione che converge a v_0 uniformemente su ogni palla B_R di $\mathbb{R}^d$. Allora, per ogni $R > 0$, v_{r_n} converge a v_0 fortemente in $H^1(B_R)$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che

$$v_{r_n} \to v_0 \quad \text{forte-}L^2(B_R) \qquad \text{e} \qquad v_{r_n} \rightharpoonup v_0 \quad \text{debole-}H^1(B_R),$$

per ogni $R > 0$. Fissato $R > 0$, mostreremo che

$$v_{r_n} \to v_0 \quad \text{forte-}H^1(B_R).$$

Per semplicità scriveremo

$$v_n := v_{r_n}.$$

Sia ϕ una funzione in $C_c^\infty(B_{2R})$ tale che

$$0 \le \phi \le 1 \quad \text{in} \quad B_{2R} \qquad \text{e} \qquad \phi \equiv 1 \quad \text{su} \quad B_R.$$

Per la quasi-minimaità di v_n, esiste una successione

$$\varepsilon_n \to 0$$

tale che

$$\int_{B_{2R}} |\nabla v_n|^2\,dx \le \int_{B_{2R}} \big|\nabla\big(v_n + (v_0 - v_n)\phi\big)\big|^2\,dx + \varepsilon_n.$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to 0} \left(\int_{B_{2R}} \big|\nabla\big(v_n + (v_0 - v_n)\phi\big)\big|^2\,dx - \int_{B_{2R}} |\nabla v_n|^2\,dx\right)\\
&= \lim_{n\to 0} \int_{B_{2R}} \Big(2\nabla v_n \cdot \nabla\big((v_0 - v_n)\phi\big) + \big|\nabla\big((v_0 - v_n)\phi\big)\big|^2\Big)\,dx\\
&= \lim_{n\to 0} \int_{B_{2R}} \Big(2\phi\nabla v_n \cdot \nabla\big(v_0 - v_n\big) + \big|\nabla(v_0 - v_n)|^2\phi^2\Big)\,dx,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la convergenza debole di $\nabla(v_n - v_0)$ e la convergenza forte di $v_n - v_0$ in L^2. Sempre per la convergenza debole di $\nabla(v_n - v_0)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to 0} \int_{B_{2R}} \Big(2\phi\nabla v_n \cdot \nabla\big(v_0 - v_n\big) + \big|\nabla(v_0 - v_n)|^2\phi^2\Big)\,dx\\
&\le \lim_{n\to 0} \int_{B_{2R}} \Big(2\phi\nabla(v_n - v_0) \cdot \nabla\big(v_0 - v_n\big) + \big|\nabla(v_0 - v_n)|^2\phi^2\Big)\,dx,
\end{aligned}$$

che possiamo scrivere anche come

$$0 \le \lim_{n\to 0} \int_{B_{2R}} \Big((1-\varphi)^2 - 1\Big)|\nabla(v_0 - v_n)|^2\,dx \le \lim_{n\to 0} \int_{B_R} -|\nabla(v_0 - v_n)|^2\,dx.$$ □