

## STIMA DEL GRADIENTE E TEOREMA DI LIOUVILLE

## 1. STIMA DEL GRADIENTE PER FUNZIONI ARMONICHE

**Lemma 1.** Sia  $u \in H_{loc}^1(B_R)$  una funzione armonica su  $B_R \subset \mathbb{R}^d$ . Allora

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq \frac{2d}{R} \|u\|_{L^\infty(B_R)}.$$

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $u \in C^\infty(B_R)$ . Allora, per ogni  $i = 1, \dots, d$ , la derivata parziale  $\partial_i u : B_R \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione armonica e quindi ha la proprietà della media in ogni punto  $x \in B_{R/2}$

$$\partial_i u(x) = \int_{B_{R/2}(x)} \partial_i u(y) dy = \frac{2^d}{\omega_d R^d} \int_{\partial B_{R/2}(x)} u \nu_i d\mathcal{H}^{d-1} \leq \frac{2d}{R} \|u\|_{L^\infty(B_R)}. \quad \square$$

## 2. TEOREMA DI LIOUVILLE

**Teorema 2** (Teorema di Liouville). Se  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione armonica e limitata, allora  $u$  è una costante.

*Dimostrazione.* Per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  abbiamo

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{2d}{R} \|u\|_{L^\infty(B_R)} \leq \frac{2d}{R} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Passando al limite per  $R \rightarrow +\infty$ , otteniamo  $\nabla u(x_0) = 0$ . Siccome il punto  $x_0$  è arbitrario si ha la tesi.  $\square$

**Corollario 3.** Se  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione armonica e Lipschitziana in  $\mathbb{R}^d$ , allora  $u$  è della forma

$$u(x) = a \cdot x + b$$

dove  $a \in \mathbb{R}^d$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Siccome le derivate parziali di  $u$  sono funzioni armoniche e limitate, per il teorema di Liouville abbiamo che il gradiente di  $u$  è costante

$$\nabla u(x) = a \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

Di conseguenza, la funzione

$$v(x) = u(x) - a \cdot x$$

ha gradiente nullo su  $\mathbb{R}^d$  ed è quindi una costante.  $\square$

## 3. OSSERVAZIONI, ESERCIZI E GENERALIZZAZIONI

## 3.1. Stima del gradiente e disuguaglianza di Caccioppoli.

**Osservazione 4.** La stima del gradiente è la versione  $L^\infty$  della disuguaglianza di Caccioppoli

$$\int_{B_{R/2}} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{4}{R^2} \int_{B_R} u^2 dx.$$

**Esercizio 5.** Dimostrare la disuguaglianza di Caccioppoli usando una funzione test della forma  $\varphi^2 u$ , per una funzione cut-off  $\varphi$  scelta opportunamente.

## 3.2. Stime di ordine superiore.

**Esercizio 6.** Sia  $h : B_R \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica in  $B_R \subset \mathbb{R}^d$ . Mostrare che

$$(1) \quad \|\partial_{ij} h\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq \frac{16d^2}{R^2} \|h\|_{L^\infty(B_R)} \quad \text{per ogni } i, j \in \{1, \dots, d\}.$$

**Esercizio 7.** Sia  $h : B_R \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica in  $B_R \subset \mathbb{R}^d$ . Sia  $k \geq 1$  un numero naturale. Mostrare che esiste una costante dimensionale  $C_d$  tale che

$$(2) \quad \|\partial_{i_1 i_2 \dots i_k} h\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq \frac{C_d}{R^k} \|h\|_{L^\infty(B_R)} \quad \text{per ogni } i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}.$$

### 3.3. Una generalizzazione del teorema di Liouville.

**Teorema 8.** Se  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione armonica tale che

$$|u(X)| \leq a|X| + b \quad \text{per ogni } X \in \mathbb{R}^d,$$

allora  $u$  è un polinomio di grado 1. Più in generale, se esistono due costanti  $a$  e  $b$  tali che

$$|u(X)| \leq a|X|^n + b \quad \text{per ogni } X \in \mathbb{R}^d,$$

allora  $u$  è un polinomio di grado  $n$ .

*Dimostrazione.* La prima parte segue da (1), la seconda invece da (2). □

Un corollario immediato è il seguente.

**Corollario 9.** Sia  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica e  $\alpha$ -omogenea per un qualche  $\alpha > 0$ . Allora,  $\alpha$  è un intero e  $u$  è un polinomio di grado  $\alpha$ .

**Osservazione 10.** Corollario 9 si può mostrare anche direttamente. Infatti, basta osservare che se una funzione  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  è allo stesso tempo  $C^\infty$  ed  $\alpha$ -omogenea, allora necessariamente  $\alpha$  è un intero ed  $F$  è un polinomio.

### 3.4. Sviluppo di Taylor di una funzione armonica.

**Lemma 11.** Sia  $h : B_R \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica in  $B_R \subset \mathbb{R}^d$ . Allora

$$(3) \quad |h(x) - h(0) - x \cdot \nabla h(0)| \leq \frac{C_d}{R^2} |x|^2 \|h\|_{L^\infty(B_R)} \quad \text{per ogni } x \in B_{R/2},$$

dove  $C_d$  è una costante dimensionale.

*Dimostrazione.* Per ogni  $x \in B_{R/4}$ , definiamo la funzione

$$f(t) = h(xt) \quad \text{per } t \in [0, 1].$$

Allora,

$$h(x) - h(0) - x \cdot \nabla h(0) = f(1) - f(0) - f'(0) = \int_0^1 (1-t) f''(t) dt.$$

Ora, (4) segue dalla formula

$$f''(t) = \sum_{i,j=1}^d x_i x_j \partial_{ij} h(xt)$$

e la disuguaglianza (1). □

**Esercizio 12.** Sia  $h : B_R \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica in  $B_R \subset \mathbb{R}^d$  e sia  $T_n(X)$  il suo polinomio di Taylor di grado  $n$  in zero. Allora, esiste una costante  $C_{d,n}$  che dipende da  $n$  e da  $d$  tale che

$$(4) \quad |h(x) - T_n(x)| \leq \frac{C_{d,n}}{R^{n+1}} |x|^{n+1} \|h\|_{L^\infty(B_R)} \quad \text{per ogni } x \in B_{R/2}.$$

**Proposizione 13.** Sia  $h : B_R \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica in  $B_R \subset \mathbb{R}^d$  e sia  $P_n(X)$  il suo polinomio di Taylor di grado  $n$  in zero. Allora

$$T_n(X) = p_0 + p_1(X) + p_2(X) + \cdots + p_n(X),$$

dove per ogni  $k = 1, \dots, n$  il polinomio  $p_k$  è omogeneo di grado  $k$  e armonico.

*Dimostrazione.* Supponiamo che

$$u(X) = p_k(X) + o(|X|^k).$$

Allora la successione

$$u_r(X) = \frac{1}{r^k} u(rX)$$

converge a  $p_k$  uniformemente su  $B_2$ . Usando la disuguaglianza di Caccioppoli, abbiamo che la convergenza è forte  $H^1$  in  $B_1$ . Siccome  $u_r$  sono funzioni armoniche, anche il limite  $p_k$  è una funzione armonica. □