Continuità Lipschitz delle soluzioni di equazioni ellittiche in forma diveregenza

1. Il teorema

Teorema 1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \operatorname{div} F \quad in \quad \Omega\ ,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\beta}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\beta > 0$.*

Allora, u è lipschitziana su ogni compatto $K \subset\subset \Omega$.

Osserviamo che basta dimostrare che dato un compatto $K \subset\subset \Omega$, esistono una costante $C > 0$ ed un raggio $R > 0$ tali per cui vale la stima

$$\fint_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \le C \quad \text{per ogni} \quad x_0 \in K \quad \text{ed ogni} \quad r \le R.$$

In particolare, basta dimostrare il lemma seguente.

Lemma 2. *Siano $\rho \le 1$, $B_\rho \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_\rho)$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \operatorname{div} F \quad in \quad B_\rho.$$

Supponiamo che:

- *$A(0) = \mathrm{Id}$ e che esistono costanti $C_A > 0$ ed $\alpha > 0$ tali che*
$$\big(1 - C_A|x|^\alpha\big)\, Id \le A_x \le \big(1 + C_A|x|^\alpha\big)\, Id \qquad per\ ogni \qquad x \in B_\rho.$$
- *esistono costanti $0 < \ell \le L$ tali che*
$$\ell\,\mathrm{Id} \le A_x \le L\,\mathrm{Id} \qquad per\ ogni \qquad x \in B_\rho.$$
- *$f \in L^p(B_\rho)$ per un qualche $p > d$.*
- *esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che*
$$\sup_{x \in B_r(y)} |F(x) - F(y)| \le C_F r^\beta \quad per\ ogni \quad r \le \rho,$$
e per ogni $y \in B_\rho$.

Allora, esiste una costante $C = C_{d,\ell,L,\alpha,\beta,p} > 0$ che dipende solo da $d, \ell, L, \alpha, \beta, p$ tale che

$$\left(\fint_{B_r} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C \left(\Big(1 + (C_A\rho^\alpha)^{d/4}\Big)\left(\fint_{B_\rho} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + \rho^{1-d/p}\|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F\rho^\beta\right),$$

per ogni $r \le \rho$.

2. Quasi-minimalità delle soluzioni

Lemma 3. *Siano $B_\rho \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_\rho)$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \operatorname{div} F \quad in \quad B_\rho.$$

Supponiamo che:

- *$A(0) = \mathrm{Id}$.*
- *Esistono costanti $C_A > 0$ e $\alpha > 0$ tali che*
$$\big(1 - C_A|x|^\alpha\big)\,\mathrm{Id} \le A(x) \le \big(1 + C_A|x|^\alpha\big)\,\mathrm{Id} \qquad per\ ogni \qquad x \in B_\rho.$$
- *$f \in L^p(B_\rho(x_0))$ per un qualche $p > d$.*
- *esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che*
$$\sup_{B_R(x_0)} |F(x) - F(x_0)| \le C_F R^\beta \quad per\ ogni \quad R \le \rho.$$

Allora, per ogni $R \le \rho$

$$\fint_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx \le 4C_A R^\alpha \fint_{B_R} |\nabla u|^2\,dx + 4\Big(C_d \|f\|_{L^p(B_\rho(x_0))} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big),$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Dimostrazione. Per ogni $B_R \subset B_\rho$, consideriamo la soluzione del problema

$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_R, \qquad u-h \in H^1_0(B_R).$$

Allora, per l'ottimalità di u,

$$\begin{aligned}\frac12\big(1 - C_A R^\alpha\big)\int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx - \int_{B_R} fu\,dx - \int_{B_R} F\cdot\nabla u\,dx \\ \le \frac12 \int_{B_R} \nabla u\cdot A_x \nabla u\,dx - \int_{B_R} fu - \int_{B_R} F\cdot\nabla u\,dx \\ \le \frac12 \int_{B_R} \nabla h\cdot A_x \nabla h\,dx - \int_{B_R} fh - \int_{B_R} F\cdot\nabla h\,dx \\ \le \frac12\big(1 + C_A R^\alpha\big)\int_{B_R} |\nabla h|^2\,dx - \int_{B_R} fh - \int_{B_R} F\cdot\nabla h\,dx\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\frac12 \int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx &= \frac12\left(\int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx - \int_{B_R} |\nabla h|^2\,dx\right) \\ &\le C_A R^\alpha \int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx + \int_{B_R} f(u-h)\,dx + \int_{B_R} F\cdot\nabla(u-h)\,dx.\end{aligned}$$

Ora, osserviamo che

$$\begin{aligned}\int_{B_R} f(u-h)\,dx &\le \left(\int_{B_R} f^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{B_R} (u-h)^2\,dx\right)^{1/2} \\ &\le |B_R|^{1/2-1/p}\left(\int_{B_R} f^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_{B_R} (u-h)^2\,dx\right)^{1/2} \\ &\le |B_R|^{1/2-1/p}\|f\|_{L^p} C_d\, R\left(\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx\right)^{1/2},\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} f(u-h)\,dx \le C_d \|f\|_{L^p} R^{1-d/p}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} F\cdot\nabla(u-h)\,dx &\le \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |F(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx\right)^{1/2} \\ &\le C_F R^\beta\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo

$$\frac12 \fint_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx \le C_A R^\alpha \fint_{B_R} |\nabla u|^2\,dx + \Big(C_d\|f\|_{L^p} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big)\left(\fint_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

che implica

$$\frac14 \fint_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx \le C_A R^\alpha \fint_{B_R} |\nabla u|^2\,dx + \Big(C_d\|f\|_{L^p} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big)^2.$$ □

3. Dimostrazione di Lemma 2

3.1. La stima principale. Siano
$$0 < r < R \le \rho.$$
Cosnideriamo l'estensione armonica di u in B_R
$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_R, \qquad u - h \in H^1_0(B_R).$$
Allora,
$$\begin{aligned}
\Big(\fint_{B_r} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2} &\le \Big(\fint_{B_r} |\nabla h|^2\,dx\Big)^{1/2} + \Big(\fint_{B_r} |\nabla (u-h)|^2\,dx\Big)^{1/2}\\
&\le \Big(\fint_{B_R} |\nabla h|^2\,dx\Big)^{1/2} + \Big(\frac{R^d}{r^d}\fint_{B_R} |\nabla (u-h)|^2\,dx\Big)^{1/2}\\
&\le \Big(\fint_{B_R} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2} + \Big(\frac{R^d}{r^d}\fint_{B_R} |\nabla (u-h)|^2\,dx\Big)^{1/2}\\
&\le \Big(\fint_{B_R} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2} + \frac{R^{d/2}}{r^{d/2}}\Big(4C_A R^\alpha \fint_{B_R} |\nabla u|^2\,dx + 4\Big(C_d\|f\|_{L^p}R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big)^2\Big)^{1/2}\\
&\le \Big(1 + 2C_A^{1/2}R^{\alpha/2}\frac{R^{d/2}}{r^{d/2}}\Big)\Big(\fint_{B_R} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2} + 2\frac{R^{d/2}}{r^{d/2}}\Big(C_d\|f\|_{L^p}R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big).
\end{aligned}$$

3.2. Stima iterativa. Ponendo
$$M_n = \Big(\fint_{B_{\rho/2^n}} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2},$$
nella stima precedente, otteniamo
$$M_{n+1} \le \Big(1 + \rho^{\alpha/2}\frac{2^{1+d/2}C_A^{1/2}}{2^{\alpha(n+1)/2}}\Big) M_n + 2^{1+d/2}\Big(\frac{C_d\rho^{1-d/p}\|f\|_{L^p}}{2^{n(1-d/p)}} + \frac{C_F\rho^\beta}{2^{n\beta}}\Big), \tag{1}$$
per ogni $n \ge 0$.

Ora, poniamo:

- $X := \dfrac{1}{2^\kappa}$, dove $\kappa := \min\Big\{\dfrac{\alpha}{2}\,;\ \beta\,;\ 1 - \dfrac{d}{p}\Big\}$;
- $A := \rho^{\alpha/2} C_d\, C_A^{1/2}$;
- $B := C_d\Big(\rho^{1-d/p}\|f\|_{L^p} + \rho^\beta C_F\Big)$.

Di conseguenza, abbiamo
$$M_{n+1} \le (1 + AX^n)M_n + BX^n.$$
Mostreremo che M_n rimane limitata per $n \to +\infty$.

Osservazione 4. *Osserviamo che nella definizione della costante κ (e quindi di X) abbiamo i seguenti casi particolari:*

($X1$) se la matrice A è costante, allora possiamo scegliere $C_A = 0$ ed $\alpha = 2$;
($X2$) se $F = 0$, allora $C_F = 0$ e $\beta = 1$;
($X3$) se $f = 0$ oppure $f \in L^\infty$, allora $1 - \frac{d}{p} = 1$.

Lemma 5. *Sia $(M_n)_{n\ge n_0}$ una successione di numeri positivi tale che*
$$M_{n+1} \le (1 + AX^n)M_n + BX^n \quad \textit{per ogni} \quad n \ge n_0,$$
dove A e B sono costanti e $0 < X < 1$. Allora, esiste $m \ge n_0$ che dipende solo da A e da X tale che
$$M_n \le \frac{M_m}{1-X} + \frac{B}{(1-X)^2} \quad \textit{per ogni} \quad n \ge m.$$
Precisamente, basta scegliere m in modo tale d'avere la stima $\dfrac{AX^m}{1-X} \le X$.

Dimostrazione. Sia
$$a_n := M_n + CX^n.$$
Allora,
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= M_{n+1} + CX^{n+1} \\ &\le (1+AX^n)M_n + BX^n + CX^{n+1} \\ &\le (1+AX^n)a_n + BX^n + CX^{n+1} - (1+AX^n)CX^n \\ &\le (1+AX^n)a_n + \Big(B - (1-X)C\Big)X^n. \end{aligned}$$
Scegliendo
$$C = \frac{B}{1-X},$$
abbiamo che
$$a_{n+1} \le (1+AX^n)a_n \quad \text{per ogni} \quad n.$$
Supponiamo ora che per un qualche $n \ge m$
$$a_n \le D\sum_{k=m}^{n} Y^k,$$
dove $D > 0$ e $Y \in (0,1)$ sono costanti (che sceglieremo in seguito). Allora
$$\begin{aligned} a_{n+1} \le (1+AX^n)a_n &\le D(1+AX^n)\sum_{k=m}^{n} Y^k \\ &\le D\sum_{k=m}^{n+1} Y^k - DY^{n+1} + DAX^n\sum_{k=m}^{n} Y^k \\ &\le D\sum_{k=1}^{n+2} Y^k - DY^{n+1} + \frac{DAY^m}{1-Y}X^n. \end{aligned}$$
Scegliendo, $X = Y$ ed m abbastanza grande in modo tale che
$$\frac{AX^m}{1-X} \le X,$$
otteniamo che
$$a_n \le D\sum_{k=m}^{n} X^k \le \frac{DX^m}{1-X} = \frac{a_m}{1-X} \quad \text{per ogni} \quad n \ge m,$$
dove abbiamo scelto D in modo di avere $DX^m = a_m$. □

3.3. **Conclusione.** Usando Lemma 5 e la stima (1), otteniamo che per ogni $n \ge m$
$$\begin{aligned} \left(\fint_{B_{\rho/2^n}} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2} &\le \frac{1}{1-X}\left(\fint_{B_{\rho/2^m}} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2} + \frac{C_d}{(1-X)^2}\Big(\rho^{1-d/p}\|f\|_{L^p} + \rho^\beta C_F\Big) \\ &\le \frac{2^{md}}{1-X}\left(\fint_{B_\rho} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2} + \frac{C_d}{(1-X)^2}\Big(\rho^{1-d/p}\|f\|_{L^p} + \rho^\beta C_F\Big), \end{aligned}$$
dove m è un qualsiasi numero naturale tale che
$$\rho^{\alpha/2} C_d\, C_A^{1/2}\frac{X^m}{1-X} \le X.$$
In particolare, essendo $\rho < 1$, possiamo scegliere m come il più piccolo numero naturale tale per cui
$$C_d\, C_A^{1/2}\frac{X^m}{1-X} \le X.$$
In questo modo m dipende soltanto da C_1, α, d/p, β e la dimensione. Questo conclude la dimostrazione del Lemma 2.

3.4. **Stima del gradiente.** Un corollario del Lemma 3 è la ben nota stima del gradiente.

Proposizione 6. *Siano $B_R \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$ una soluzione di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad B_R,$$

dove $f \in L^p(B_R)$ per un qualche $p > d$. Allora, esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \le C_d \left(\frac{1}{R} \|u\|_{L^\infty(B_R)} + R^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_R)} \right).$$

Dimostrazione. Per il Lemma 2 sappiamo che esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \le C_d \left(\left(\fint_{B_{3R/2}} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} + R^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_R)} \right).$$

Per la disuguaglianza di Caccioppoli, invece

$$\fint_{B_{3R/2}} |\nabla u|^2 \le C_d \frac{1}{R^2} \fint_{B_R} u^2 \le C_d \frac{1}{R^2} \|u\|^2_{L^\infty(B_R)}. \qquad \square$$

4. Continuità Lipschitz fino al bordo

Teorema 7. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ con bordo $C^{1,\alpha}$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \operatorname{div} F & \text{in} \quad \Omega \cap B_\rho \\ u = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega \cap B_\rho, \end{cases}$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*
- *$g \in C^{1,\alpha}(B_\rho)$.*

Allora, $u \in C^{0,1}(B_{\rho/2} \cap \overline{\Omega})$.

Ragionando come nella dimostrazione del Lemma 2, otteniamo

Lemma 8. *Siano H un iperpiano in $\mathbb{R}^d$ con vettore normale $\nu \in \mathbb{R}^d$. Definiamo*

$$H^+ := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ x \cdot \nu > 0\}.$$

Siano $\bar{x} \in H$, $B_R(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R(\bar{x}))$ una soluzione di

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \operatorname{div} F & \text{in} \quad B_R(\bar{x}) \cap H^+, \\ \quad u = 0 \quad \text{su} \quad B_R(x') \setminus H^+ \ . \end{cases}$$

Supponiamo che:

- *esistono costanti $C_A > 0$ e $\alpha > 0$ tali che*
$$\big(1 - C_A|x-y|^\alpha\big) A_y \le A_x \le \big(1 + C_A|x-y|^\alpha\big) A_y \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in B_R(\bar{x}).$$
- *esistono costanti $0 < \ell \le L$ tali che*
$$\ell\,\mathrm{Id} \le A_x \le L\,\mathrm{Id} \qquad \text{per ogni} \qquad x \in B_\rho(\bar{x}).$$
- *$f \in L^p(B_R(\bar{x}))$ per un qualche $p > d$.*
- *esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che*
$$\sup_{x \in B_r(y)} |F(x) - F(y)| \le C_F r^\beta \quad \text{per ogni} \quad r \le R,$$
e per ogni $y \in B_R(\bar{x})$.

Allora, esiste una costante $C = C_{d,\ell,L,\alpha,\beta,p} > 0$ *che dipende solo da* $d, \ell, L, \alpha, \beta, p$ *tale che*

$$\left(\fint_{B_r\cap H^+}|\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C\left(\left(1+(C_A R^\alpha)^{d/4}\right)\left(\fint_{B_R(\bar x)\cap H^+}|\nabla u|^2\right)^{1/2} + R^{1-d/p}\|f\|_{L^p(B_R)} + C_F R^\beta\right),$$

per ogni $r \le R$.

4.1. **Dimostrazione di Teorema 7.** Supponiamo che

$$\Omega = H^+ \qquad \text{e} \qquad g = 0.$$

Sia $x_0 \in B_{\rho/4}\cap H^+$. Sia $y_0 \in B_{\rho/4}\cap H^+$ la proiezione di x_0 su H e sia $r_0 = |x_0 - y_0|$.

Per il Lemma 8, prendendo

$$R_0 = 2r_0\,,$$

abbiamo

$$\left(\fint_{B_{R_0}(y_0)\cap H^+}|\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C\left(\left(1+(C_A \rho^\alpha)^{d/4}\right)\left(\fint_{B_\rho\cap H^+}|\nabla u|^2\right)^{1/2} + \rho^{1-d/p}\|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F \rho^\beta\right),$$

dove $C = C_{d,\ell,L,\alpha,\beta,p}$. Ora, sicccome

$$B_{r_0}(x_0) \subset B_{R_0}(y_0)\cap H^+$$

esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che

$$\fint_{B_{r_0}(x_0)}|\nabla u|^2 \le C_d \fint_{B_{R_0}(y_0)\cap H^+}|\nabla u|^2.$$

Di conseguenza,

$$\left(\fint_{B_{r_0}(x_0)}|\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C\left(\left(1+(C_A \rho^\alpha)^{d/4}\right)\left(\fint_{B_\rho\cap H^+}|\nabla u|^2\right)^{1/2} + \rho^{1-d/p}\|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F \rho^\beta\right).$$

D'altra parte, usando Proposizione 2, abbiamo

$$|\nabla u(x_0)| \le C\left(\left(1+(C_A r_0^\alpha)^{d/4}\right)\left(\fint_{B_{r_0}(x_0)}|\nabla u|^2\right)^{1/2} + r_0^{1-d/p}\|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F r_0^\beta\right).$$

Mettendo le due stime insieme, otteniamo che $|\nabla u|$ è limitato in $B_{\rho/4}$. $\square$

Bibliografia

La dimostrazione della continuità Lipschitz delle soluzioni (Teorema 1) è un miglioramento della classica dimostrazione della continuità Hölder delle soluzioni.

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag Berlin (2001).
[J] J. Jost. *Partial differential equations.* Springer-Verlag New York (2002).