Problemi ellittiche in forma diveregenza

1. Matrici simmetriche a coefficienti costanti

Definizione 1. *Siano M ed N due matrici $d \times d$ simmetriche a coefficienti reali. Diciamo che $M \le N$, se*

$$v \cdot Mv \le v \cdot Nv \qquad \text{per ogni vettore} \quad v \in \mathbb{R}^d.$$

Lemma 2. *Siano M ed N due matrici $d \times d$ simmetriche a coefficienti reali.*
Sia U una matrice $d \times d$ invertibile a coefficienti reali. Allora,

$$M \le N \qquad \text{se e solo se} \qquad U^t MU \le U^t NU.$$

Proposizione 3. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica (a coefficienti reali). Siano $\lambda_1(A), \dots, \lambda_d(A)$ gli autovalori della matrice A e siano $\ell \le L$ due costanti positive. Allora, sono equivalenti:

(i) $\ell \le \lambda_i(A) \le L$, *per ogni* $i = 1, \dots, d$;

(ii) $\ell\,\mathrm{Id} \le A \le L\,\mathrm{Id}$.

Corollario 4. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica (a coefficienti reali) tale che

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A \le L\,\mathrm{Id} \qquad \text{dove} \qquad 0 < \ell \le L < +\infty\,.$$

Allora, per ogni $B_R \subset \mathbb{R}^d$ abbiamo

$$B_{\ell R} \subset A(B_R) \subset B_{LR}.$$

Proposizione 5. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica (a coefficienti reali) tale che

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A \le L\,\mathrm{Id} \qquad \text{dove} \qquad 0 < \ell \le L < +\infty\,.$$

Sia U la matrice unitaria tale che

$$A = U^t\, D\big(\lambda_1, \dots, \lambda_d\big)\, U,$$

dove $D(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ è la matrice diagonale

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_d) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_d \end{pmatrix}$$

Allora, la matrice

$$B := U^t\, D\left(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_d^{-1/2}\right) U$$

è una matrice simmetrica con le proprietà seguenti:

- $BAB = \mathrm{Id}$;
- $L^{-1/2}\,\mathrm{Id} \le B \le \ell^{-1/2}\,\mathrm{Id}$.

2. L'equazione

Il dominio. Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$.

La funzione f. Sia $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \geq d$.

Il campo F. Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$,

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_d(x) \end{pmatrix}$$

un campo vettoriale tale per cui esistono due costanti

$$C_F > 0 \qquad \text{e} \qquad \beta > 0,$$

tali che

$$|F(x) - F(y)| \leq C_F |x - y|^\beta \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in \Omega.$$

L'operatore. Sia A una matrice simmetrica a coefficienti variabili

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

con le seguenti proprietà:

- I coefficienti di A sono funzioni Hölder continue:
$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici} \quad 1 \leq i, j \leq d.$$
In particolare, supponiamo che esistono due costanti C_A e $\alpha > 0$ tali che per ogni a_{ij}
$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq C_A |x - y|^\alpha \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \Omega.$$
- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, ovvero esistono costanti $0 < \ell \leq L$ tali che
$$\ell\, \mathrm{Id} \leq A(x) \leq L\, \mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega\ .$$

La soluzione. Diciamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega\ ,$$

se

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot A(x)\nabla u\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi\, dx - \int_\Omega F(x) \cdot \nabla\varphi\, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

3. Cambiamento delle variabili

La matrice B. Sia B una matrice simmetrica a coefficienti costanti. Come unica ipotesi su B, supponiamo che vale la stima

$$L^{-1/2}\mathrm{Id} \leq B \leq \ell^{-1/2}\mathrm{Id}.$$

Allora, osserviamo che

$$L^{-d/2} \leq \det B \leq \ell^{-d/2}.$$

In particolare, B è invertibile, B^{-1} è simmetrica e si ha che

$$\ell^{1/2}\mathrm{Id} \leq B^{-1} \leq L^{1/2}\mathrm{Id}.$$

Inoltre,

$$|B^{-1}x| \leq L^{1/2}|x| \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Il cambio di variabile. Consideriamo l'insieme aperto limitato $B(\Omega)$ e la funzione

$$v : B(\Omega) \to \mathbb{R}\ , \qquad v(x) := u(B^{-1}x).$$

L'equazione per v. Data una funzione test

$$\psi \in C_c^\infty(B(\Omega)),$$

consideriamo la funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, definita come

$$\varphi(x) = \psi(Bx).$$

Allora, siccome u è soluzione in Ω, abbiamo che

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot A(x)\nabla u\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx - \int_\Omega F(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx.$$

Quindi, calcoliamo:

(i) Definiamo la matrice simmetrica

$$\widetilde{A}_y := BA_{B^{-1}y}B \quad \text{per ogni} \quad y \in B(\Omega).$$

Si ha quindi che

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\varphi(x)\cdot A_x\nabla u(x)\,dx &= \frac{1}{|\det B|}\int_{B(\Omega)} \nabla\psi(y)\cdot\Big(B\,A_{B^{-1}y}\,B\Big)\nabla v(y)\,dy\\ &= \frac{1}{|\det B|}\int_{B(\Omega)} \nabla\psi(y)\cdot\widetilde{A}_y\nabla v(y)\,dy.\end{aligned}$$

Inoltre, valgono le stime

$$\frac{\ell}{L}\mathrm{Id} \le \widetilde{A}_y \le \frac{L}{\ell}\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad y \in B(\Omega),$$

e se $\widetilde{a}_{ij} : B(\Omega) \to R$ sono i coefficienti di $\widetilde{A}$, allora

$$\begin{aligned}\big|\widetilde{a}_{ij}(x) - \widetilde{a}_{ij}(y)\big| &= \big|e_i\cdot\widetilde{A}_x e_j - e_i\cdot\widetilde{A}_y e_j\big|\\ &= \big|e_i\cdot(\widetilde{A}_x - \widetilde{A}_y)e_j\big|\\ &= \big|(Be_i)\cdot\big(A_{B^{-1}x} - A_{B^{-1}y}\big)[Be_j]\big|\\ &\le |Be_i|\,|Be_j|\,\|A_{B^{-1}x} - A_{B^{-1}y}\|_2\\ &\le |Be_i|\,|Be_j|\,dC_A\big|B^{-1}x - B^{-1}y\big|^\alpha\\ &\le \ell^{-1}L^{\alpha/2}\,dC_A|x-y|^\alpha.\end{aligned}$$

(ii) Se le funzioni

$$f \in L^2(\Omega) \qquad \text{e} \qquad g \in L^2(B(\Omega))$$

sono tali che

$$f(x) = g(Bx) \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

Allora,

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|\det(B)|}\int_{B(\Omega)} \psi(y)\,g(y)\,dy.$$

Inoltre,

$$\int_\Omega |f(x)|^p\,dx = \frac{1}{|\det(B)|}\int_{B(\Omega)} |g(y)|^p\,dy,$$

e quindi

$$\int_{B(\Omega)} |g(y)|^p\,dy \le L^{d/2}\int_\Omega |f(x)|^p\,dx.$$

(iii) Se i campi vettoriali

$$F \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad G \in L^2(B(\Omega);\mathbb{R}^d)$$

sono tali che

$$F(x) = B[G(Bx)] \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

Allora,

$$\int_\Omega \nabla\varphi(x)\cdot F(x)\,dx = \frac{1}{|\det(B)|}\int_{B(\Omega)} \nabla\psi(y)\cdot G(y)\,dy.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}|G(x)-G(y)| &= \Big|B^{-1}F\big(B^{-1}x\big)-B^{-1}F\big(B^{-1}y\big)\Big|\\ &\le L^{1/2}\Big|F\big(B^{-1}x\big)-F\big(B^{-1}y\big)\Big|\\ &\le L^{1/2}C_F\big|B^{-1}x-B^{-1}y\big|^{\beta}\\ &\le L^{\frac{1+\beta}{2}}C_F|x-y|^{\beta}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che v è soluzione di

$$-\mathrm{div}(\widetilde{A}\,\nabla v)=g+\mathrm{div}\,G\quad\text{in}\quad B(\Omega),$$

dove $\widetilde{A}$, G e g soddisfano le stime seguenti:

$$\frac{\ell}{L}\mathrm{Id}\le\widetilde{A}_y\le\frac{L}{\ell}\mathrm{Id}\quad\text{per ogni}\quad y\in B(\Omega);$$
$$\big|\widetilde{a}_{ij}(x)-\widetilde{a}_{ij}(y)\big|\le\ell^{-1}L^{\alpha/2}\,dC_A|x-y|^{\alpha}\quad\text{per ogni}\quad x,y\in B(\Omega);$$
$$\|g\|_{L^p(B(\Omega))}\le L^{d/2p}\|f\|_{L^p(\Omega)};$$
$$|G(x)-G(y)|\le L^{\frac{1+\beta}{2}}C_F|x-y|^{\beta}\quad\text{per ogni}\quad x,y\in B(\Omega).$$

---

4. Sulla continuità delle matrici a coefficienti variabili

Lemma 6. *Siano $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un insieme aperto ed*

$$A_x=\begin{pmatrix}a_{11}(x)&\dots&a_{1d}(x)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{d1}(x)&\dots&a_{dd}(x)\end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica a coefficienti variabili definita su Ω. Supponiamo che $x_0\in\Omega$ sia tale che A_{x_0} e che esistono costanti $C>0$ ed $\alpha>0$ tali che per ogni coefficiente $a_{ij}:\Omega\to\mathbb{R}$ vale la stima

$$\big|a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0)\big|\le C|x-x_0|^{\alpha}\quad\textit{per ogni}\quad x\in\Omega.$$

Allora,

$$\big(1-dC|x-x_0|^{\alpha}\big)\,\mathrm{Id}\le A_x\le\big(1+dC|x-x_0|^{\alpha}\big)\,\mathrm{Id}\qquad\textit{per ogni}\qquad x\in\Omega.$$

In particolare, data una palla $B_r(x_0)\subset\Omega$, si ha

$$\big(1-dCr^{\alpha}\big)\int_{B_r(x_0)}|\nabla\varphi|^2\,dx\le\int_{B_r(x_0)}\nabla\varphi(x)\cdot\,A_x\,\nabla\varphi(x)\,dx\le\big(1+dCr^{\alpha}\big)\int_{B_r(x_0)}|\nabla\varphi|^2\,dx\,,$$

per ogni $\varphi\in H^1(B_r(x_0))$.