Inf e sup di funzioni di Sobolev

Lemma 1 (Composizione con funzioni regolari)**.** *Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ e tale che*

$$F(0) = 0 \qquad e \qquad L := \|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty.$$

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $u \in H^1_0(\Omega)$. Allora anche la funzione

$$F(u) : \Omega \to \mathbb{R}$$

è una funzione di $H^1_0(\Omega)$ e

$$\partial_j(F(u)) = F'(u)\,\partial_j u.$$

Dimostrazione. Siccome

$$|F(u(x))| = |F(u(x)) - F(0)| \le L|u(x)| \qquad \text{per ogni} \qquad x \in \Omega\ ,$$

abbiamo che

$$F(u) \in L^2(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \|F(u)\|_{L^2} \le L\|u\|_{L^2}\ .$$

Inoltre, abbiamo anche la stima

$$\|F'(u)\partial_j u\|_{L^2} \le \|F'(u)\|_{L^\infty}\|\partial_j u\|_{L^2} \le L\|\partial_j u\|_{L^2}\ .$$

Sia u_n una successione di funzioni $C^\infty_c(\Omega)$ tale che:

- $u_n \to u$ puntualmente quasi-ovunque;
- $u_n \to u$ fortemente in $L^2(\mathbb{R}^d)$;
- $\partial_j u_n \to \partial_j u$ fortemente in $L^2(\mathbb{R}^d)$, per ogni $j = 1, \dots, d$.

Osserviamo che

$$F(u_n) \in C^\infty_c(\Omega)$$

e che

$$F(u_n) \to F(u) \qquad \text{e} \qquad F'(u_n) \to F'(u)$$

forte in $L^2(\Omega)$. In particolare, per ogni $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, si ha

$$\int_\Omega F'(u)\,\partial_j u\,\varphi\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega F'(u_n)\,\partial_j u_n\,\varphi\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi\,\partial_j\big[F(u_n)\big]\,dx,$$

ovvero:

- $F(u_n)$ converge fortemente in $L^2(\mathbb{R}^d)$ a $F(u)$;
- $\partial_j\big[F(u_n)\big]$ converge debolmente in $L^2(\mathbb{R}^d)$ a $F'(u)\partial_j u$.

Di conseguenza,

$$F(u) \in H^1_0(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \partial_j\big[F(u)\big] = F'(u)\partial_j u.$$

□

Teorema 2 (La parte positiva di una funzione di Sobolev)**.** *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H^1_0(\Omega)$. Allora la funzione*

$$u_+(x) = \max\{u(x), 0\}$$

è in $H^1_0(\Omega)$ e

$$\nabla u_+ = \mathbb{1}_{\{u>0\}}\nabla u.$$

Dimostrazione. Sia $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni tale che:

- $F_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ per ogni n ;
- $|F_n'| \le 1$ su $\mathbb{R}$ per ogni n;
- la successione F_n' è crescente e

$$\lim_{n\to\infty} F_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \le 0; \\ 1 & \text{se} \quad x > 0; \end{cases}$$

- $F_n(x) = 0$ per ogni $x \le 0$ e per ogni n;
- $|F_n(x) - x| \le \frac{1}{n}$ per ogni $x \ge 0$ e per ogni n.

Allora, possiamo verificare che

$$F_n(u) \to u_+$$

quasi-ovunque su Ω, fortemente in $L^2(\Omega)$ e debolmente in H^1. Il gradiente debole di $F_n(u)$ è dato da

$$\nabla F_n(u) = F_n'(u)\nabla u.$$

Ora, osserviamo che

$$F_n'(u) \to \mathbb{1}_{\{u>0\}}$$

puntualmente e forte in $L^2_{loc}(\Omega)$. Di conseguenza,

$$\nabla u_+ = \lim_{n\to\infty} \nabla F_n(u) = \mathbb{1}_{\{u>0\}}\nabla u,$$

dove il limite è debole L^2. $\square$

Corollario 3 (Modulo di una funzione di Sobolev)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_0(\Omega)$. Allora,*

$$|u| \in H^1_0(\Omega) \qquad e \qquad \nabla|u| = \mathbb{1}_{\{u>0\}}\nabla u - \mathbb{1}_{\{u<0\}}\nabla u.$$

Teorema 4. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_0(\Omega)$. Allora, per ogni $t \geq 0$ le funzioni*

$$u \wedge t(x) := \min\{u(x), t\} \qquad e \qquad (u-t)_+(x) := \max\{u(x) - t, 0\}$$

sono in $H^1_0(\Omega)$.

Dimostrazione. Per esercizio. $\square$

Bibliografia

[EG] L. Evans, R. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Studies in Advanced mathematics, Crc Press (1991).