Boundary Harnack Principle

Teorema 1. *Sia $g : B_1' \to \mathbb{R}$ una funzione L-Lipschitziana e tale che $g(0) = 0$. Siano*

$$u, v : \Omega(g, g+1; B_1') \cup \Gamma(g; B_1') \to \mathbb{R}\,,$$

due funzioni continue tali che

$$\Delta u = 0 \quad e \quad u > 0 \quad in \quad \Omega(g, g+1; B_1')\,, \qquad u = 0 \quad su \quad \Gamma(g; B_1');$$

$$\Delta v = 0 \quad e \quad v > 0 \quad in \quad \Omega(g, g+1; B_1')\,, \qquad v = 0 \quad su \quad \Gamma(g; B_1').$$

Allora, il rapporto

$$\frac{u}{v} : \Omega(g, g+1; B_1') \to \mathbb{R}$$

si estende ad una funzione hölderiana su $\Omega(g, g+1; B_1') \cup \Gamma(g; B_1')$.

Una proposizione generale: Boundary Harnack Inequality $\Rightarrow$ Boundary Harnack Principle

Data una funzione continua

$$g : B_1' \to \mathbb{R},$$

tale che $g(0) = 0$ e dati

$$x_0 = (x_0', g(x_0')) \in \Gamma(g; B_1') \qquad \text{ed} \qquad r \in (0, 1 - |x_0'|),$$

poniamo

$$\Omega_r(x_0) := \Omega\big(g, g+r; B_r'(x_0')\big)\,, \qquad \Gamma_r(x_0) := \Gamma\big(g; B_r'(x_0')\big)\,, \qquad P_r(x_0) := \Big(\,x_0'\,,\, g(x_0') + \frac{r}{2}\,\Big).$$

Proposizione 2. *Supponiamo che esiste una costante $M > 0$ tale per cui*

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{per ogni } x_0 \in \partial\Omega_{1/2}(x_0) \text{ ed ogni } r \in (0, 1 - |x_0|), \\ \text{e per ogni coppia di funzioni continue e non-negative} \\ \qquad u, v : \Omega_r(x_0) \cup \Gamma_r(x_0) \to \mathbb{R} \\ \text{soluzioni di} \\ \qquad \Delta u = \Delta v = 0 \quad in \quad \Omega_r(x_0)\,, \\ \qquad u = v = 0 \quad su \quad \Gamma_r(x_0)\,, \\ \qquad u(P_r(x_0)) = v(P_r(x_0))\,, \\ \text{abbiamo che} \\ \qquad \dfrac{1}{M} \le \dfrac{u(x)}{v(x)} \le M \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega_{r/2}(x_0). \end{cases}$$

Allora, esistono costanti $\alpha > 0$ and $C > 0$, che dipendono da M e la dimensione d, tali che per ogni coppia di funzioni continue e non-negative

$$u, v : \Omega_1(0) \to \mathbb{R}$$

soluzioni di

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta u = \Delta v = 0 \quad in \quad \Omega_1(0), \\ u = v = 0 \quad su \quad \Gamma_1(0), \\ u(P_1(0)) = v(P_1(0)) > 0\,, \end{cases}$$

vale la stima seguente

$$\left|\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(y)}{v(y)}\right| \le C|x-y|^\alpha \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in \Omega_{1/4}(0)\,.$$

Decadimento dell'osciallazione al bordo.

Lemma 3. *Supponiamo che vale la proprietà (1). Allora, per ogni $x_0 \in \partial\Gamma_{1/2}(0)$, $r \le 1/2$, ed ogni coppia di funzioni continue e non-negative*

$$u, v : \Omega_1(0) \to \mathbb{R}\,,$$

soluzioni di

$$\Delta u = \Delta v = 0 \quad in \quad \Omega_r(x_0)\ , \qquad u = v = 0 \quad su \quad \Gamma_r(x_0)\,,$$

si ha che

$$\operatorname*{osc}_{\Omega_{r/2}(x_0)} \frac{u}{v} \le \Big(1 - \frac{1}{2M}\Big) \operatorname*{osc}_{\Omega_r(x_0)} \frac{u}{v},$$

dove M è la costante di (1).

Inoltre, scegliendo $\kappa > 0$ in modo tale che per ogni $x_0 \in \partial\Gamma_{1/2}(0)$ ed ogni $r \le 1/2$ si ha

$$B_{\kappa r}(x_0) \cap \Omega \subset \Omega_{r/2}(x_0) \subset \Omega_r(x_0) \subset B_r(x_0) \cap \Omega \qquad dove \qquad \Omega := \Omega_1(0)\,,$$

otteniamo

$$\operatorname*{osc}_{\Omega \cap B_{r/2}(x_0)} \frac{u}{v} \le \Big(1 - \frac{1}{2M}\Big) \operatorname*{osc}_{\Omega \cap B_r(x_0)} \frac{u}{v}.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$P_r := P_r(x_0)\ , \qquad M_r := \sup_{\Omega_r(x_0)} \frac{u}{v} \qquad \text{e} \qquad m_r := \inf_{\Omega_r(x_0)} \frac{u}{v}\,,$$

ed osserviamo che

$$\operatorname*{osc}_{\Omega_r(x_0)} \frac{u}{v} = M_r - m_r\,.$$

Consideriamo due casi.

Caso 1. Supponiamo che $\dfrac{u(P_r)}{v(P_r)} \ge \dfrac{M_r + m_r}{2}$. Allora, le funzioni

$$u - m_r v \qquad \text{e} \qquad v\,,$$

sono armoniche e non-negative in $\Omega_r(x_0)$ e soddisfano la disuguaglianza

$$u(P_r) - m_r v(P_r) \ge \frac{M_r - m_r}{2} v(P_r).$$

Allora, usando (1), abbiamo

$$u - m_r v \ge \frac{1}{M}\frac{M_r - m_r}{2} v \qquad \text{in} \qquad \Omega_{r/2}(x_0).$$

Quindi

$$\inf_{\Omega_{r/2}(x_0)} \frac{u}{v} \ge m_r + \frac{1}{M}\frac{M_r - m_r}{2},$$

e di conseguenza

$$\operatorname*{osc}_{\Omega_{r/2}(x_0)} \frac{u}{v} \le M_r - \left(m_r + \frac{1}{M}\frac{M_r - m_r}{2}\right) = (M_r - m_r)\left(1 - \frac{1}{2M}\right).$$

Caso 2. $\dfrac{u(P_r)}{v(P_r)} \le \dfrac{M_r + m_r}{2}$. Allora,

$$M_r v - u \ge \frac{1}{M}\frac{M_r - m_r}{2} v \qquad \text{in} \qquad \Omega_{r/2}(x_0),$$

il che implica

$$\sup_{\Omega_{r/2}(x_0)} \frac{u}{v} \le M_r - \frac{1}{M}\frac{M_r - m_r}{2},$$

ed in conclusione

$$\operatorname*{osc}_{\Omega_{r/2}(x_0)} \frac{u}{v} \le \left(M_r - \frac{1}{M}\frac{M_r - m_r}{2}\right) - m_r = (M_r - m_r)\left(1 - \frac{1}{2M}\right).$$

□

Dimostrazione di Proposizione 2. Sotto l'ipotesi (2) e ponendo

$$\Omega := \Omega_1(0) \qquad \text{e} \qquad \Gamma := \Gamma_1(0)\,,$$

mostreremo che vale la proposizione seguente

$$(3)\qquad \begin{cases} \text{Esiste una costante } c \in (0,1) \text{ tale che per ogni } x_0 \in \overline{\Omega} \cap B_{1/2}, \text{ ogni } r \leq 1/2, \\ \text{ed ogni coppia di funzioni continue e non-negative} \\ \qquad\qquad u, v : \Omega \cup \Gamma \to \mathbb{R} \\ \text{soluzini di} \\ \qquad \Delta u = \Delta v = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u = v = 0 \quad \text{su} \quad \Gamma\,, \\ \text{abbiamo che} \\ \qquad\qquad \operatorname*{osc}_{\Omega \cap B_{r/16}(x_0)} \dfrac{u}{v} \leq (1-c) \operatorname*{osc}_{\Omega \cap B_r(x_0)} \dfrac{u}{v}. \end{cases}$$

Per dimostrare (3) consideriamo due casi.

Caso 1. Esiste $y_0 \in \Gamma \cap B_{r/8}(x_0)$.Allora,

$$B_{r/2}(y_0) \subset B_r(x_0),$$

ed applicando il lemma precedente abbiamo che

$$\operatorname*{osc}_{B_{r/4}(y_0)\cap\Omega} \frac{u}{v} \leq \Big(1 - \frac{1}{2M}\Big) \operatorname*{osc}_{B_{r/2}(y_0)\cap\Omega} \frac{u}{v} \leq \Big(1 - \frac{1}{2M}\Big) \operatorname*{osc}_{B_r(x_0)\cap\Omega} \frac{u}{v}.$$

Ora, siccome $B_{r/8}(x_0) \subset B_{r/4}(y_0)$, otteniamo

$$\operatorname*{osc}_{B_{r/8}(x_0)\cap\Omega} \frac{u}{v} \leq (1-c) \operatorname*{osc}_{B_r(x_0)\cap\Omega} \frac{u}{v} \qquad \text{con} \qquad c := \frac{1}{2M}.$$

Caso 2. $B_{r/8}(x_0) \subset \Omega$.
Allora, per la disuguaglianza di Harnack, abbiamo

$$\operatorname*{osc}_{B_{r/16}(x_0)\cap\Omega} \frac{u}{v} \leq (1-c_{\mathcal{H}}) \operatorname*{osc}_{B_{r/8}(x_0)\cap\Omega} \frac{u}{v} \leq (1-c_{\mathcal{H}}) \operatorname*{osc}_{B_r(x_0)\cap\Omega} \frac{u}{v},$$

dove $c_{\mathcal{H}} \in (0,1)$ è la costante dimensionale nella disuguaglianza di Harnack.
Questo conclude la dimostrazione di (3). □

Bibliografia

[K] C. E. Këníg. *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems.* AMS Press (1994).

[MTV] F. P. Maiale, G. Tortone, B. Velichkov. *The Boundary Harnack principle on optimal domains.* ArXiv (2021).