Boundary Harnack Inequality

Sia $L > 0$ una costante fissata. Sia $B'_r \subset \mathbb{R}^{d-1}$ una palla di raggio r e centro zero in $\mathbb{R}^{d-1}$. Date due funzioni

$$g, h : B'_r \to \mathbb{R}\ , \quad g < h \quad \text{su} \quad B'_r\ ,$$

definiamo il dominio normale $\Omega(g, h; B'_r)$ come

$$\Omega(g, h; B'_r) := \Big\{(x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}\ :\ x' \in B'_r\ ;\ \ g(x') < x_d < h(x')\Big\}.$$

Definiamo inoltre il grafico

$$\Gamma(g; B'_r) := \Big\{(x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}\ :\ x' \in B'_r\ ;\ \ x_d = g(x')\Big\}.$$

Teorema 1. *Sia $g : B'_1 \to \mathbb{R}$ una funzione L-Lipschitziana e tale che $g(0) = 0$. Siano*

$$u, v : \Omega(g, g + 1; B'_1) \cup \Gamma(g; B'_1) \to \mathbb{R}$$

due funzioni continue e tali che

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \quad e \quad u > 0 \quad in \quad \Omega(g, g + 1; B'_1)\ , \qquad u = 0 \quad su \quad \Gamma(g; B'_1),\\ &\Delta v = 0 \quad e \quad v > 0 \quad in \quad \Omega(g, g + 1; B'_1)\ , \qquad v = 0 \quad su \quad \Gamma(g; B'_1). \end{aligned}$$

Se

$$u(0, 1/2) = v(0, 1/2),$$

allora esiste una costante $M > 0$ che dipende solo dalla dimensione d e la costante L tale che

$$\frac{1}{M} v \le u \le M v \qquad in \qquad \Omega\big(g, g + \frac{1}{2}; B'_{1/2}\big)\ .$$

La dimostrazione del teorema è una conseguenza delle Proposizioni 4 e 7.

Funzioni armoniche positive su coni

Lemma 2 (Disuguaglianza di Harnack all'interno)**.** *Sia u una funzione armonica positiva sulla palla $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Allora,*

(1) $$\sup_{u \in B_{R/2}} u \le C_d \inf_{u \in B_{R/2}} u\ ,$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Lemma 3 (Funzioni armoniche su coni)**.** *Sia $L > 0$ una costante data e sia $\mathcal{C}$ il cono aperto*

$$\mathcal{C} := \Big\{(x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}\ :\ x_d > L|x'|\Big\}.$$

Sia $u : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ una funzione armonica e positiva su $\mathcal{C}$. Allora, per ogni $p > 0$, vale la disuguaglianza

$$\sup\Big\{u(0', q)\ :\ \frac{p}{2\sqrt{1 + L^2}} \le q \le p\Big\} \le C_d\, u(0', p)$$

dove C_d è la costante nella disuguaglianza di Harnack (1). In particolare,

(2) $$u\Big(0', \frac{p}{(2\sqrt{1 + L^2})^k}\Big) \le \big(C_d\big)^k u(0', p),$$

per ogni $k \ge 1$.

Dimostrazione. Segue dal fatto che la palla di centro $(0', p)$ e raggio $R := \dfrac{p}{\sqrt{1 + L^2}}$ è contenuta in $\mathcal{C}$. $\square$

Step 1

Proposizione 4. *Sia $g : B_1' \to \mathbb{R}$ una funzione L-Lipschitziana tale che $g(0) = 0$. Sia*

$$w : \Omega(g, g+1; B_1') \cup \Gamma(g; B_1') \to \mathbb{R}$$

una funzione continua e tale che

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \textit{in} \quad \Omega(g, g+1; B_1') \\ w > 0 & \textit{in} \quad \Omega(g, g+1; B_1') \\ w = 0 & \textit{su} \quad \Gamma(g; B_1') \\ w \le 1 & \textit{in} \quad \Omega(g + \frac{1}{2}, g+1; B_1'). \end{cases}$$

Allora,

$$w \le C \quad \textit{in} \quad \Omega\big(g, g + {}^1\!/\!_4; B'_{1/4}\big),$$

dove $C > 0$ è una costante che dipende soltanto da L e la dimensione d.

Dimostrazione. Segue da Lemma 5 e Lemma 6. □

Lemma 5. *Sia $g : B_1' \to \mathbb{R}$ una funzione L-Lipschitziana. Sia*

$$w : \Omega\big(g, g+1; B_1'\big) \to \mathbb{R}$$

una funzione armonica e positiva in $\Omega\big(g, g+1; B_1'\big)$ e tale che

$$w \le 1 \quad \textit{su} \quad \Omega\Big(g + \frac{1}{2}, g+1; B_1'\Big).$$

Allora,

$$w(x', x_d) \le \frac{C}{\big(x_d - g(x')\big)^\beta} \quad \textit{per ogni} \quad (x', x_d) \in \Omega\Big(g, g + \frac{1}{2}; B'_{1/2}\Big),$$

dove β e C dipendono solo dalla costante L e la dimensione d.

Dimostrazione. Segue dal Lemma 3 prendendo β in modo tale che

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{1+L^2}}\right)^{-\beta} = C_d.$$

Infatti, in questo modo (2) diventa

$$u\Big(0', \frac{p}{(2\sqrt{1+L^2})^k}\Big) \le p^{-\beta}\left(\frac{p}{(2\sqrt{1+L^2})^k}\right)^\beta u(0', p).$$

Osserviamo che ogni $q < 1$ può essere scritto come

$$q = \frac{p}{(2\sqrt{1+L^2})^k} \qquad \text{per qualche} \qquad k \ge 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\sqrt{1+L^2}} \le p < 1.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} u(0', q) &\le p^{-\beta} |q|^\beta \sup\Big\{u(0', p) \ : \ \frac{1}{2\sqrt{1+L^2}} \le p < 1\Big\} \\ &\le \big(2\sqrt{1+L^2}\big)^\beta |q|^\beta \sup\Big\{u(0', p) \ : \ \frac{1}{2\sqrt{1+L^2}} \le p < 1\Big\}. \end{aligned}$$

Infine, per la disuguaglianza di Harnack all'interno si ha la stima

$$\sup\Big\{u(0', p) \ : \ \frac{1}{2\sqrt{1+L^2}} \le p < 1\Big\} \le \sup\Big\{u(0', p) \ : \ \frac{1}{2} \le p < 1\Big\}.$$

□

Lemma 6. *Sia $g : B_1' \to \mathbb{R}$ una funzione L-Lipschitziana e tale che $g(0) = 0$. Sia*
$$w : \Omega(g, g+1; B_1') \cup \Gamma(g; B_1') \to \mathbb{R},$$
una funzione continua tale che:
$$\Delta w = 0 \quad e \quad w > 0 \quad in \quad \Omega(g, g+1; B_1')\ ; \qquad w = 0 \quad su \quad \Gamma(g; B_1').$$
Se
$$\int_{\Omega(g,g+1;B_1')} w^\varepsilon\, dx \le 1,$$
per un qualche $\varepsilon > 0$, allora
$$w \le M \quad in \quad \Omega\big(g, g + {}^1\!/\!_2; B'_{1/2}\big),$$
dove M dipende solo da L, d ed ε.

Dimostrazione. Fissato un punto
$$\big(x', g(x') + p\big) \in \Omega\big(g, g + \frac{1}{2}; B'_{1/2}\big),$$
poniamo
$$M := w\big(x', g(x') + p\big) \qquad \text{e} \qquad \delta := \frac{\varepsilon}{2d}\ ,$$
e consideriamo due casi.

Caso 1. $2p \ge M^{-\delta}$. Osserviamo che w è armonica e positiva in $B_R(x', g(x') + p)$, dove
$$R := \frac{p}{\sqrt{1 + L^2}}.$$
Allora, per la disuguaglianza di Harnack
$$w \ge c_d M \quad \text{in} \quad B_{R/2}(x', g(x') + p),$$
e quindi
$$1 \ge \int w^\varepsilon\, dx \ge \int_{B_{R/2}(x_0)} w^\varepsilon\, dx \ge |B_{R/2}|(c_d M)^\varepsilon \ge \frac{\omega_d\, c_d^\varepsilon}{2^d (1 + L^2)^{d/2}}\, M^{-d\delta + \varepsilon} \ge \frac{c_d^\varepsilon}{(1 + L^2)^{d/2}}\, M^{\varepsilon/2}.$$
Di conseguenza,
$$M \le \frac{1}{c_d^2}(1 + L^2)^{d/\varepsilon}.$$

Caso 2. Supponiamo ora che
$$2p \le M^{-\delta} \qquad \text{e} \qquad M > \frac{1}{c_d^2}(1 + L^2)^{d/\varepsilon}.$$
Per semplicità, poniamo
$$x_0 := (x', g(x') + p).$$
Osserviamo che $B_{M^{-\delta}}(x', g(x') + p)$ continene $B_{\frac{M^{-\delta}}{2}}(x', g(x'))$. Di conseguenza, siccome
$$\Delta w \ge 0 \qquad \text{in} \qquad B_{\frac{M^{-\delta}}{2}}(x', g(x')),$$
abbiamo che
$$M = w(x_0) \le \frac{1}{|B_{M^{-\delta}}|} \int_{B_{M^{-\delta}}(x_0)} w(x)\, dx \le \frac{|B_{M^{-\delta}}(x_0) \cap \{w > 0\}|}{|B_{M^{-\delta}}|} \|w\|_{L^\infty(B_{M^{-\delta}}(x_0))}.$$
Siccome in $B_{M^{-\delta}/2}(x', g(x'))$ abbiamo la stima di densità
$$|B_{\frac{M^{-\delta}}{2}}(x', g(x')) \setminus \Omega(g, g+1; B_1')| \ge \mu |B_{\frac{M^{-\delta}}{2}}|,$$
per un qualche $\mu = \mu(L, d) \in (0, 1)$, otteniamo la stima
$$M \le (1 - 2^{-d}\mu)\|w\|_{L^\infty(B_{M^{-\delta}}(x_0))} \le \frac{1}{1 + 2^{-d}\mu}\|w\|_{L^\infty(B_{M^{-\delta}}(x_0))}.$$
Esiste quindi un punto x_1 tale per cui
$$|x_1 - x_0| \le M^{-\delta} \qquad \text{e} \qquad w(x_1) \ge (1 + 2^{-d}\mu)M.$$
Iterando questa procedura, otteniamo una successione x_n di punti in $\Omega(g, g + 1/2; B'_{1/2})$ tale che
$$w(x_{n+1}) \ge (1 + 2^{-d}\mu) w(x_n) \ge M(1 + 2^{-d}\mu)^n \qquad \text{and} \qquad |x_{n+1} - x_n| \le \frac{1}{M^\delta (1 + 2^{-d}\mu)^{n\delta}}.$$

Infatti, scegliendo M abbastanza grande, possiamo assumere che si ha che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{M^{\delta}(1+2^{-d}\mu)^{n\delta}} \leq \frac{1}{4},$$

e quindi la successione x_n rimane in $\Omega(g, g+3/4; B'_{3/4})$. Ma questo è assurdo perché si avrebbe $w(x_n) \to \infty$. $\square$

Step 2

Proposizione 7 (De Silva-Savin). *Data una costante $L > 0$, esistono $\delta_1 > 0$, $a > 0$, $M > 0$, $\kappa > 0$ (che dipendono solo da L e la dimensione d) tali che se $g : B'_1 \to \mathbb{R}$ è una funzione L-Lipschitziana con $g(0) = 0$ e se*

$$w : \Omega(g, g+1; B'_1) \cup \Gamma(g; B'_1) \to \mathbb{R}$$

è una funzioni continua soluzione di

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \textit{in} \quad \Omega(g, g+1; B'_1) \\ w = 0 & \textit{su} \quad \Gamma(g; B'_1) \\ w \geq M & \textit{su} \quad \Omega(g+\delta, g+1; B'_1) \\ w \geq -1 & \textit{su} \quad \Omega(g, g+\delta; B'_1)\}, \end{cases}$$

con $\delta \in (0, \delta_1]$, allora

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \textit{in} \quad \Omega\big(g, g+\kappa; B'_\kappa\big) \\ w = 0 & \textit{su} \quad \Gamma\big(g; B'_\kappa\big) \\ w \geq aM & \textit{su} \quad \Omega\big(g+\kappa\delta, g+\kappa; B'_\kappa\big) \\ w \geq -a & \textit{su} \quad \Omega\big(g, g+\kappa\delta; B'_\kappa\big). \end{cases}$$

Dimostrazione. Osserviamo che la funzione $w+1$ è positiva e armonica in $\Omega(g, g+1; B'_1)$. Allora, esiste una costante $A = A(d, L, \kappa) > 0$ tale che

$$\min_{\Omega(g+\kappa\delta, g+\kappa; B'_\kappa)} (w+1) \geq \frac{1}{A} \min_{\Omega(g+\delta, g+1; B'_1)} (w+1) \geq \frac{1}{A}(M+1),$$

e quindi, scegliendo

$$a = \frac{1}{2A} \qquad \text{e} \qquad M = 2A,$$

otteniamo

$$\min_{\Omega(g+\kappa\delta, g+\kappa; B'_\kappa)} w \geq \frac{1}{A}(M+1) - 1 \geq 1 \geq aM.$$

Per la stima della w su $\Omega\big(g, g+\kappa\delta; B'_\kappa\big)$, scegliamo un raggio R tale per cui

$$B_R(x_0) \subset \Big\{(x', x_d) \ : \ x_d < g(x') + 1\Big\} \qquad \text{per ogni} \qquad x_0 \in \Gamma(g; B'_\kappa).$$

Siccome la parte negativa

$$w_-(x) := -\min\{w(x), 0\}$$

è una funzione positiva e subarmonica in $B_R(x_0)$, possiamo applicare n volte: il Lemma 8

$$\sup_{B_{R/4^n}(x_0)} w_- \leq (1-c)^n \sup_{B_R(x_0)} w_- \leq (1-c)^n.$$

Quindi, scegliendo n abbastanza grande tale per cui

$$(1-c)^n \leq \frac{1}{2A} = a,$$

otteniamo

$$\sup_{B_{R/4^n}(x_0)} w_- \leq a \qquad \text{per ogni} \qquad x_0 \in \Gamma(g; B'_\kappa).$$

Scegliamo ora δ_1 tale che

$$\kappa\delta_1 \leq \frac{R}{4^n}.$$

Quindi,

$$\Omega\Big(g, g+\kappa\delta; B'_\kappa\Big) \ \subset\ \Omega\Big(g, g+\kappa\delta_1; B'_\kappa\Big) \ \subset\ \Omega\Big(g, g+\frac{R}{4^n}; B'_\kappa\Big),$$

e di conseguenza

$$\sup_{\Omega(g,g+\kappa\delta;B'_\kappa)} w_- \le a,$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Lemma 8. *Sia $w : B_1 \to \mathbb{R}$ una funzione subarmonica tale che*

$$0 \le w \le 1 \qquad su \qquad B_1.$$

Se x

$$|\{w = 0\} \cap B_{1/4}| \ge \mu |B_{1/4}| \quad \text{per una qualche costante} \quad \mu > 0,$$

allora

$$w \le 1 - c \quad su \quad B_{1/4},$$

dove $c > 0$ dipende da μ e la dimensione d.

Dimostrazione. Infatti, per il teorema della media, per ogni $x_0 \in B_{1/4}$ si ha

$$w(x_0) \le \frac{1}{|B_{1/2}|}\int_{B_{1/2}(x_0)} w(x)\,dx \le \frac{1}{|B_{1/2}|}\Big(|B_{1/2}| - \mu|B_{1/4}|\Big) = 1 - \frac{\mu}{2^d}. \qquad \square$$

Bibliografia

[DS] D. De Silva, O. Savin. *A short proof of boundary Harnack inequality.* J. Differ. Equations **269** (2020).
[K] C. E. Kënig. *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems.* AMS (1994).
[MTV] F. P. Maiale, G. Tortone, B. Velichkov. *The Boundary Harnack principle on optimal domains.* ArXiv (2021).