Principio del massimo di Hopf in domini $C^{1,\alpha}$

Una conseguenza delle stime $C^{1,\alpha}$ di Schauder

Lemma 1. *Consideriamo una matrice simmetrica a coefficienti variabili $A = (a_{ij})_{ij}$, dove:*
- $A(0) = \mathrm{Id}$*;*
- $a_{ij} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *sono funzioni Hölder continue, ovvero esistono costanti $C > 0$ ed $\alpha > 0$ tali che*
$$|a_{ij}(y) - a_{ij}(x)| \le C|y - x|^\alpha \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$
per ogni $1 \le i, j \le d$;
- *A è limitata e uniformemente ellittica, ovvero esistono costanti $0 < \ell \le L < +\infty$ tali che*
$$\ell\,\mathrm{Id} \le A(x) \le L\,\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Consideriamo il punto $\bar{x} = 2e_d$ ed il dominio $\Omega := B_2(\bar{x}) \setminus B_1(\bar{x})$. Per ogni $r \in (0, 1)$ consideriamo la matrice
$$A_r(x) := A(rx),$$
e la soluzione $u_r : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ del problema
$$\mathrm{div}(A_r(x)\nabla u_r) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u_r = 0 \quad \text{su} \quad \partial B_2(\bar{x})\,, \qquad u_r = 1 \quad \text{su} \quad \partial B_1(\bar{x}).$$
Allora esistono due costanti dimensionali $0 < c_d < C_d$ ed un raggio r_0 che dipende dalla matrice A tali che
$$c_d \le |\nabla u_r(0)| \le C_d \quad \text{per ogni} \quad r \le r_0.$$

Hopf in domini $C^{1,\alpha}$

Teorema 2. *Sia $A = (a_{ij})_{ij}$ una matrice simmetrica a coefficienti variabili tale che:*
- $A(0) = \mathrm{Id}$*;*
- $a_{ij} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *sono funzioni Hölder continue, ovvero esistono costanti $C > 0$ ed $\alpha > 0$ tali che*
$$|a_{ij}(y) - a_{ij}(x)| \le C|y - x|^\alpha \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$
per ogni $1 \le i, j \le d$;
- *A è limitata e uniformemente ellittica, ovvero esistono costanti $0 < \ell \le L < +\infty$ tali che*
$$\ell\,\mathrm{Id} \le A(x) \le L\,\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Consideriamo il dominio $\Omega := B_1 \cap \{x_d > 0\}$ ed una soluzione $u : B_1 \cap \{x_d \ge 0\} \to \mathbb{R}$ del problema
$$\mathrm{div}(A\nabla u) = 0 \quad \text{e} \quad u > 0 \quad \text{in} \quad B_1 \cap \{x_d > 0\}\,, \qquad u = 0 \quad \text{su} \quad B_1 \cap \{x_d = 0\}.$$
Allora, $|\nabla u(0)| > 0$.

Hopf in domini C^1

Consideriamo la funzione esponenziale complesso:
$$E : \Omega \to \mathbb{R}^2\ , \quad E(x + iy) = e^x \big(\cos y + i \sin y\big)\,,$$
dove
$$\Omega := \mathbb{R} \times \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big)$$
Sull'insieme
$$\widetilde{\Omega} := \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x > 0 \Big\} = \Big\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \ :\ \rho > 0,\ \theta \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big) \Big\},$$
possiamo definire il logaritmo complesso
$$L : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$$

in coordinate polari come

$$L(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \ln\rho + i\theta.$$

Allora,

$$L : \widetilde{\Omega} \to \Omega$$

è l'inversa di

$$E : \Omega \to \widetilde{\Omega}.$$

Inoltre, siccome E è olomorfa in Ω, lo è anche L in $\widetilde{\Omega}$. Consideriamo ora la parte reale (data direttamente in coordinate polari) della funzione $z/\ln z$:

$$u(\rho,\theta) = Re\Big(\frac{\rho\cos\theta + i\rho\sin\theta}{\ln\rho + i\theta}\Big) = \frac{\rho\ln\rho\cos\theta + \rho\theta\sin\theta}{(\ln\rho)^2 + \theta^2} = \rho\frac{\ln\rho\cos\theta + \theta\sin\theta}{(\ln\rho)^2 + \theta^2},$$

ed il dominio

$$D := \Big\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \ : \ 0 < \rho < \frac{1}{2}\ , \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\ , \quad \ln\rho + \theta\tan\theta > 0\Big\}.$$

Allora:

- u è armonica e positiva in D;
- $u(0) = 0$;
- u è continua su $\bar{D}$;
- u è differenziabile su $\bar{D} \setminus \{(0,0)\}$;
- u è differenziabile in $(0,0)$ e $|\nabla u| = 0$.

Bibliografia

[SdL] J. C. Sabina de Lis. *Hopf maximum principle revisited.* Electron. J. Diff. Eq. **115** (2015), 1–9.