# Teorema di Serrin

## Teorema di Serrin

**Teorema 1** (Serrin). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato con frontiera di classe $C^2$ e sia $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ la soluzione di*

$$-\Delta w = 1 \quad in \quad \Omega, \qquad w = 0 \quad su \quad \partial\Omega\,.$$

*Se $w \in C^2(\overline{\Omega})$ ed esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|\nabla w| = c \quad su \quad \partial\Omega,$$

*allora $\Omega$ è una palla: $\Omega = B_r(x_0)$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$.*

$$w(x) = \frac{1}{2d}\big(r^2 - |x - x_0|^2\big) \qquad per\ ogni \qquad x \in B_r(x_0).$$

**Lemma 2.** *Sia $g : (-T, T) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2$ tale che $g(0) = g'(0) = 0$ e siano*

$$\Omega := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ -T < x < T,\ y > g(x)\Big\} \qquad e \qquad \Gamma := \Big\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 \ :\ -T < x < T\Big\}.$$

*Sia*

$$u : \Omega \cup \Gamma \to \mathbb{R}$$

*una funzione non-negativa e di classe $C^2$ su $\Omega \cup \Gamma$ tale che:*

$$u = 0 \qquad e \qquad |\nabla u| = 1 \qquad su \qquad \Gamma\ .$$

*Allora,*

$$\partial_x u(0, 0) = 0\ , \quad \partial_y u(0, 0) = 1\ , \quad \partial_{xy} u(0, 0) = 0.$$

*Dimostrazione.* Siccome

$$u(x, g(x)) = 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in (-T, T),$$

abbiamo che

$$0 = \partial_x\Big[u(x, g(x))\Big] = \partial_x u(x, g(x)) + g'(x)\partial_y u(x, g(x)).$$

Siccome $g'(0) = 0$, otteniamo che $\partial_x u(0, 0)$. Di conseguenza $\partial_y u(0, 0) = 1$. Analogamente

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_{xx}\Big[u(x, g(x))\Big] \\
&= \partial_x\Big[\partial_x u(x, g(x)) + g'(x)\partial_y u(x, g(x))\Big] \\
&= \partial_{xx} u(x, g(x)) + 2g'(x)\partial_{xy} u(x, g(x)) + (g'(x))^2\partial_{yy} u(x, g(x)) + g''(x)\partial_y u(x, g(x)),
\end{aligned}$$

e quindi

$$0 = \partial_{xx} u(0, 0) + g''(0)\partial_y u(0, 0).$$

Ora, siccome

$$1 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + (g'(x))^2}}\big(-g'(x), 1\big) \cdot \big(\partial_x u(x, g(x)), \partial_y u(x, g(x))\big),$$

derivando in $x = 0$, otteniamo

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{x=0}\Big(g'(x)\partial_x u(x, g(x)) - \partial_y u(x, g(x))\Big) = g''(0)\partial_x u(0, 0) - \partial_{xy} u(0, 0),$$

e di conseguenza,

$$\partial_{xy} u(0, 0) = 0.$$

□

## Principio del massimo di Hopf

**Lemma 3.** *Siano $B_r \subset B_R \subset \mathbb{R}^d$. Allora esistono due costanti $C > 0$ e $\alpha > 0$ tali che la funzione*

$$u(X) = C\Big(e^{-\alpha|X|^2} - e^{-\alpha R^2}\Big)$$

*è soluzione di*

$$\Delta u \geq 0 \quad in \quad B_R \setminus B_r\ , \qquad u = 0 \quad su \quad \partial B_R\ , \qquad u = 1 \quad su \quad \partial B_r\ .$$

**Teorema 4** (Hopf in domini $C^2$)**.** *Sia $B'_r$ la palla di raggio $r$ e centro $0'$ in $\mathbb{R}^{d-1}$.*
*Sia $g : B'_r \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2$ su $B_r$ tale che*

$$g(0') = |\nabla_{x'} g(0')| = 0 \qquad e \qquad -r < g(x') < r \quad per\ ogni \quad x' \in B'_r.$$

*Definiamo*

$$\Omega := \Big\{(x', x_d) \in B'_r \times (-r, r)\ :\ x_d > g(x')\Big\} \qquad e \qquad \Gamma := \Big\{(x', x_d) \in B'_r \times (-r, r)\ :\ x_d = g(x')\Big\}.$$

*Sia $u : \Omega \cup \Gamma \to \mathbb{R}$ una funzione positiva e tale che*

$$\Delta u = 0 \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \geq 0 \quad su \quad \Gamma\ , \qquad u(0', 0) = 0.$$

*Se $u$ è differenziabile in $(0', 0)$, allora*

$$\frac{\partial u}{\partial x_d}(0', 0) > 0.$$

## Non degenerazione delle soluzioni in domini con angolo

**Esercizio 5.** *Sia $\Omega$ il dominio*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 4\Big\},$$

*e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$\Delta u = 0 \quad in \quad \Omega, \qquad u \geq 0 \quad in \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad su \quad \partial\Omega \cap B_1.$$

*Allora, per ogni $R \leq 1$, si ha che*

$$u(x, x) \geq C_d u(R, R)\frac{x^2}{R^2} \quad per\ ogni \quad x \in (0, R),$$

*dove $C_d > 0$ è una costante dimensionale.*

**Lemma 6.** *Sia $R > 0$ e sia $\Omega$ il dominio*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ (x - R)^2 + y^2 < R^2,\ x^2 + (y - R)^2 < R^2\Big\},$$

*e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione*

$$u(x, y) = \Big(e^{-\alpha\big((x-R)^2 + y^2\big)} - e^{-\alpha R^2}\Big)\Big(e^{-\alpha\big(x^2 + (y-R)^2\big)} - e^{-\alpha R^2}\Big).$$

*Allora:*

- *$u > 0$ in $\Omega$;*
- *$u(x, x) = e^{-2\alpha R^2}(2\alpha R)^2 x^2 + o(x^2)$;*
- *esistono $\alpha > 0$ e $\delta > 0$ tali che*

$$\Delta u > 0 \quad in \quad B_\delta \cap \Omega.$$

*Dimostrazione.* Sviluppando $\Delta u$ in $(0,0)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
e^{2\alpha R^2}\Delta u(x,y) &= \Delta\Big[\Big(e^{2\alpha xR-\alpha(x^2+y^2)}-1\Big)\Big(e^{2\alpha yR-\alpha(x^2+y^2)}-1\Big)\Big]\\
&= \Delta\Big[\Big(2\alpha xR-\alpha(x^2+y^2)+2\alpha^2x^2R^2\Big)\Big(2\alpha yR-\alpha(x^2+y^2)+2\alpha^2y^2R^2\Big)\Big]+o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\\
&= 2R\alpha^2\Delta\Big[y\Big(-(x^2+y^2)+2\alpha x^2R^2\Big)+x\Big(-(x^2+y^2)+2\alpha y^2R^2\Big)\Big]+o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\\
&= 2R\alpha^3\Delta\Big[-x^3-y^3+(x^2y+y^2x)(2\alpha R^2-1)\Big]+o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\\
&= 2R\alpha^3\Big(-6x-6y+(2y+2x)(2\alpha R^2-1)\Big)+o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\\
&= 4R\alpha^3(x+y)\Big(-3+(2\alpha R^2-1)\Big)+o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\\
&= 8R\alpha^3(x+y)(\alpha R^2-2)+o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big).
\end{aligned}$$

Scegliendo $\alpha = 4R^{-2}$, abbiamo la tesi. □

**Proposizione 7.** *Siano*

$$f:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R} \qquad e \qquad g:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$$

*due funzioni di classe $C^2$ tali che*

$$f(0)=g(0)=f'(0)=g'(0)=0\,.$$

*Siano $Q_\varepsilon=(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ e*

$$\Omega := \Big\{(x,y)\in Q_\varepsilon \;:\; y\geq f(x),\;\; x\geq g(y)\Big\}.$$

*Sia $u$ una funzione tale che*

$$\Delta u = 0 \quad in \quad \Omega\cap Q_\varepsilon\ , \qquad u=0 \quad su \quad \partial\Omega\cap Q_\varepsilon.$$

*Allora esistono due costanti $c>0$ e $\delta>0$ tali che*

$$u(x,x)\geq cx^2 \quad per\ ogni \quad x\in(0,\delta).$$

*Dimostrazione.* Segue dal lemma precedente. □

---

## Bibliografia

[S] J. Serrin. *A summetry result in potential theory.* Arch. Rat. Mech. Anal. (1971)