

Funzioni armoniche con dato Lipschitz al bordo. Esistenza, principio del confronto e regolarità

1. SOLUZIONI DI PROBLEMI ELLITTICI CON DATO AL BORDO

Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^d , $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^1(\Omega)$. Diciamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{su } \partial\Omega,$$

se

$$u - v \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Definiamo inoltre il funzionale

$$J_f(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int_{\Omega} v f \, dx \quad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega).$$

Proposizione 1. *Siano Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d , $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^1(\Omega)$. Allora, data una funzione $u \in H^1(\Omega)$, sono equivalenti:*

(1) u è soluzione debole del problema

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{su } \partial\Omega;$$

(2) u è soluzione del problema variazionale

$$\min \left\{ J_f(u) : u \in H^1(\Omega), u - g \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Proposizione 2. *Siano Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d , $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^1(\Omega)$. Allora, esiste un'unica soluzione $u \in H^1(\Omega)$ del problema*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Osservazione 3. *La soluzione u di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{su } \partial\Omega$$

si può scrivere come

$$u = u_0 + h,$$

dove:

- $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ è la soluzione del problema

$$-\Delta u_0 = f \quad \text{in } \Omega, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega).$$

- $h \in H^1(\Omega)$ è la soluzione di

$$-\Delta h = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad h = g \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Osservazione 4. *La soluzione u dipende solo del dato g al bordo, ovvero se g_1 e g_2 sono due funzioni tali che*

$$g_1 - g_2 \in H_0^1(\Omega),$$

allora le soluzioni u_1 e u_2 di

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f \quad \text{in } \Omega, & u_1 &= g_1 \quad \text{su } \partial\Omega, \\ -\Delta u_2 &= f \quad \text{in } \Omega, & u_2 &= g_2 \quad \text{su } \partial\Omega, \end{aligned}$$

coincidono.

Osservazione 5. *Data una funzione $g \in H^1(\Omega)$, si definisce l'estensione armonica di g in Ω come la soluzione debole $h \in H^1(\Omega)$ del problema*

$$-\Delta h = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad h = g \quad \text{su } \partial\Omega.$$

 2. PRINCIPIO DEL MASSIMO DEBOLE

Teorema 6. Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^d e $g \in H^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione non-negativa. Sia h la funzione armonica

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad h = g \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Allora, $h \geq 0$ in Ω .

Dimostrazione. Siccome per ipotesi $(h - g) \in H_0^1(\Omega)$, abbiamo che anche $(h - g)_+$ e $(h - g)_-$ sono in $H_0^1(\Omega)$. Ora, siccome, g è non-negativa si ha che

$$0 \leq h_- \leq (h - g)_- \quad \text{in } \mathbb{R}^d.$$

Di conseguenza,

$$h_- \in H_0^1(\Omega),$$

e quindi anche

$$h_+ - g \in H_0^1(\Omega).$$

Ora, siccome

$$\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla h_+|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla h_-|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla h_+|^2 dx,$$

e siccome h minimizza l'integrale di Dirichlet fra tutte le funzione con dato al bordo g , abbiamo che

$$\int_{\Omega} |\nabla h_-|^2 dx = 0.$$

Quindi, $h_- \equiv 0$. □

3. FUNZIONI ARMONICHE CON DATO AL BORDO LIPSCHITZ

Teorema 7. Siano Ω un aperto limitato con bordo Lipschitz in \mathbb{R}^d . Sia $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana. Allora, esiste un'unica funzione $h \in H^1(\mathbb{R}^d)$, soluzione debole di

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad h = g \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Inoltre, $h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ per un qualche $\alpha > 0$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che g sia una funzione Lipschitziana su tutto \mathbb{R}^d . Inoltre, siccome Ω è limitato, possiamo anche supporre che il supporto di g sia limitato. Quindi $g \in H^1(\mathbb{R}^d)$. In particolare, abbiamo l'esistenza di una soluzione debole di

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad h = g \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Ora, consideriamo la funzione

$$u = h - g.$$

Allora, u è soluzione debole di

$$\Delta u = \operatorname{div} F \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

dove F è il campo

$$F := \nabla g.$$

Siccome g è Lipschitz, abbiamo che $\nabla g \in L^\infty$. Quindi per il teorema di De Giorgi, $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. □