Disuguaglianza di Harnack e oscillazione

Nella dimostrazione del teorema di De Giorgi abbiamo provato che se una funzione u è soluzione di

$$\mathrm{div}(A\nabla u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

allora

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x_0)} u \le (1-c) \operatorname*{osc}_{B_{2r}(x_0)} u\,,$$

per ogni $B_{2r}(x_0)$ strettamente contenuta in Ω (e abbastanza distante dal bordo di Ω). Per le funioni armoniche questa stima è una conseguenza dalla classica disuguaglianza di Harnack.

1. Disuguaglianza di Harnack

Lemma 1 (Disuguaglianza di Harnack). *Esiste una costante dimensionale $C_{\mathcal{H}}$ tale che*

$$\max_{B_r(x_0)} h \le C_{\mathcal{H}} \min_{B_r(x_0)} h\,.$$

per ogni funzione $h : B_{2r}(x_0) \to \mathbb{R}$ non-negativa e armonica in $B_{2r}(x_0) \subset \mathbb{R}^d$. In particolare,

$$h(x_0) \le C_{\mathcal{H}} \min_{B_r(x_0)} h\,.$$

Dimostrazione. Segue dalla proprietà della media e la positività di h. □

Una conseguenza immediata della disuguaglianza di Harnack è il seguente teorema di Liouvile.

Teorema 2. *Se $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica e limitata dal basso,*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^d} u(x) > -\infty\ ,$$

allora u è costante.

2. Disuguaglianza di Harnack e decay dell'oscillazione

Definizione 3. *Dati un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ ed una funzione $u : A \to \mathbb{R}$, definiamo l'oscillazione di u su A come*

$$\operatorname*{osc}_A u = \operatorname*{ess\,sup}_A u - \operatorname*{ess\,inf}_A u.$$

In seguito scriveremo semplicemente inf *e* sup *al posto di* ess inf *ed* ess sup.

Lemma 4 (Controllo dell'oscillazione). *Esiste una costante dimensionale $c \in (0,1)$ tale che*

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x_0)} h \le (1-c) \operatorname*{osc}_{B_{2r}(x_0)} h\,,$$

per ogni funzione $h : B_{2r}(x_0) \to \mathbb{R}$ armonica in $B_{2r}(x_0) \subset \mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Per semplicita, definiamo

$$M(r) = \sup_{B_r(x_0)} h \qquad \text{e} \qquad m(r) = \inf_{B_r(x_0)} h,$$

per ogni $r > 0$. Mostreremo che

$$M(r) - m(r) \le (1-c)\big(M(2r) - m(2r)\big).$$

Consideriamo due casi.

Caso 1. Supponiamo che
$$h(x_0) \geq \frac{M(2r)+m(2r)}{2}.$$
Consideriamo la funzione $h - m(2r)$
$$0 \leq h(x) - m(2r) \leq M(2r) - m(2r) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in B_{2r}(x_0).$$
Per la disuguaglianza di Harnack, abbiamo
$$\frac{M(2r)+m(2r)}{2} - m(2r) \leq h(x_0) - m(2r) \leq C_{\mathcal{H}} \inf_{B_r(x_0)} \Big(h(x) - m(2r)\Big) = C_{\mathcal{H}}\Big(m(r) - m(2r)\Big)$$
che possiamo riscrivere come
$$\frac{M(2r)-m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}} + m(2r) \leq m(r)$$
Di conseguenza,
$$M(r) - m(r) \leq M(2r) - m(r) \leq M(2r) - \Big(\frac{M(2r)-m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}} + m(2r)\Big) \leq \left(1 - \frac{1}{2C_{\mathcal{H}}}\right)\Big(M(2r) - m(2r)\Big).$$
Caso 2. Supponiamo ora che
$$h(x_0) \leq \frac{M(2r)+m(2r)}{2}.$$
Consideriamo la funzione $M(2r) - h$
$$0 \leq M(2r) - h(x) \leq M(2r) - m(2r) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in B_{2r}(x_0).$$
Per la disuguaglianza di Harnack, abbiamo
$$M(2r) - \frac{M(2r)+m(2r)}{2} \leq M(2r) - h(x_0) \leq C_{\mathcal{H}} \inf_{B_r(x_0)} \Big(M(2r) - h(x)\Big) = C_{\mathcal{H}}\Big(M(2r) - M(r)\Big)$$
che possiamo riscrivere come
$$M(r) \leq M(2r) - \frac{M(2r)-m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}}.$$
Di conseguenza,
$$M(r) - m(r) \leq M(r) - m(2r) \leq M(2r) - \frac{M(2r)-m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}} - m(2r) \leq \left(1 - \frac{1}{2C_{\mathcal{H}}}\right)\big(M(2r) - m(2r)\big).$$
Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Come corollario otteniamo la stima seguente.

Proposizione 5. *Esiste una costante dimensionale $\alpha \in (0,1]$ tale che*
$$\|h\|_{C^{0,\alpha}(B_{R/2})} \leq \frac{C}{R^\alpha}\|h\|_{L^\infty(B_R)},$$
Per ogni funzione armonica $h : B_R \to \mathbb{R}$, dove C è una costante numerica e dove ricordiamo che
$$\|h\|_{C^{0,\alpha}(B_{R/2})} := \sup\left\{\frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|^\alpha} \ : \ x, y \in B_{R/2}, \ x \neq y\right\}.$$