

Funzioni Lipschitziane

DUE DEFINIZIONI EQUIVALENTI

Ricordiamo la seguente definizione.

Definizione 1. Data $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, diciamo che $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ se esistono $v_1, \dots, v_d \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tali che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j \varphi(x) u(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v_j(x) dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Definiamo inoltre le derivate parziali ed il gradiente in senso debole di u come:

$$\partial_j u := v_j \quad \text{e} \quad \nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_d u).$$

Inoltre, ricordiamo che data una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, esiste una successione $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u - \varphi_n|^2 dx + \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j u - \partial_j \varphi_n|^2 dx \right) = 0.$$

Lemma 2. Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Se esistono due costanti $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} \leq C|y| \quad \text{per ogni } |y| < \varepsilon,$$

allora $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e per ogni $j = 1, \dots, d$ si ha $\|\partial_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C$.

Dimostrazione. Per ogni $j \in \{1, \dots, d\}$ ed ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ definiamo

$$L_j(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \partial_j \varphi(x) dx.$$

Osserviamo che, per il teorema della convergenza dominata, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x) \partial_j \varphi(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) (\varphi(x + te_j) - \varphi(x)) dx.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} |L_j(\varphi)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \partial_j \varphi(x) dx \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) (\varphi(x + te_j) - \varphi(x)) dx \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} (u(x - te_j) - u(x)) \varphi(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Quindi L_j si può estendere ad un funzionale lineare limitato su $L^2(\mathbb{R}^d)$. Esiste quindi una funzione $v_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tale che per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j \varphi(x) u(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v_j(x) dx.$$

□

Lemma 3. Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora,

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} \leq |y| \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Fissiamo $y \in \mathbb{R}^d$ e consideriamo una funzione $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora,

$$|\varphi(x+y) - \varphi(x)|^2 \leq \left| \int_0^1 y \cdot \nabla \varphi(x+ty) dt \right|^2 \leq \int_0^1 |y \cdot \nabla \varphi(x+ty)|^2 dt \leq |y|^2 \int_0^1 |\nabla \varphi|^2(x+ty) dt.$$

Integrando in $x \in \mathbb{R}^d$ e usando il teorema di Fubini, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+y) - \varphi(x)|^2 dx &\leq |y|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla \varphi|^2(x+ty) dt dx \\ &= |y|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi|^2(x+ty) dx dt = |y|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi|^2 dx. \end{aligned}$$

Siccome $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in \mathbb{R}^d , abbiamo la tesi.

□

 LE FUNZIONI LIPSCHITZIANE A SUPPORTO COMPATTO SONO SOBOLEV

Proposizione 4 (Lipschitz \Rightarrow Sobolev). *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ ed $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana supportata in B_R con costante di Lipschitz $L > 0$,*

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Allora, $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, abbiamo che

$$\|u(x + y) - u(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} \leq |B_{R+\varepsilon}|^{1/2} L|y| \quad \text{per ogni } |y| < \varepsilon.$$

Quindi, per Lemma 2, abbiamo che $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. □

 LE FUNZIONI LIPSCHITZIANE CON GRADIENTE DEBOLE IN L^∞ SONO SOBOLEV

Proposizione 5. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Se $|\nabla u| \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, allora u è Lipschitziana e*

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^d$. Fissiamo un raggio $r > 0$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx - \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(y_0)} u(x) dx \right| &\leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |u(x_0 + x) - u(y_0 + x)| dx \\ &\leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \int_0^1 |x_0 - y_0| |\nabla u|(y_0 + t(x_0 - y_0) + x) dt dx \\ &\leq L|x - y|. \end{aligned}$$

Quindi, per ogni coppia di punti di Lebesgue, x_0, y_0 , abbiamo

$$|u(x_0) - u(y_0)| \leq L|x_0 - y_0|.$$

Infine, osserviamo che possiamo definire u in un punto qualsiasi $z \in \mathbb{R}^d$ come

$$u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n),$$

dove x_n è una successione di punti di Lebesgue che converge a z . □

 GRADIENTE DEBOLE E GRADIENTE CLASSICO DI UNA FUNZIONE LIPSCHITZIANA

Proposizione 6. *Supponiamo che $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione Lipschitziana e tale che $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Sia ∇u is gradiente in senso debole di u . Allora, per quasi ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ si ha che:*

- (i) x_0 è un punto di Lebesgue per tutte le derivate parziali debole $\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_d u$;
- (ii) u è differenziabile in x_0 ed il gradiente di u in senso classico coincide con il gradiente debole coincidono:

$$u(x + x_0) = u(x_0) + x \cdot \nabla u(x_0) + o(|x|) \quad \text{dove} \quad \nabla u(x_0) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \nabla u(x) dx.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Rademacher abbiamo che u è differenziabile in quasi-ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Per il teorema di Lebesgue invece quasi-ogni punto è un punto di Lebesgue per ∇u . Rimane da dimostrare che se x_0 è un punto di Lebesgue per ∇u nel quale u è differenziabile, allora il gradiente distribuzionale di u coincide con quello classico. Per semplicità, supponiamo che $V = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ sia un vettore tale che

$$u(x + x_0) = u(x_0) + x \cdot V + o(|x|),$$

mentre useremo ∇u solo per indicare il gradiente debole di u .

Supponiamo che $x_0 = 0$. Sia φ una funzione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1, \quad \varphi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus B_2, \quad \varphi = 1 \quad \text{in } B_1, \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad \text{in } B_2 \setminus B_1.$$

Definiamo inoltre la funzione

$$\varphi_r(x) := \frac{1}{r^d} \varphi(x/r).$$

Allora, siccome

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |\partial_j u(x) - \partial_j u(0)| dx = 0,$$

abbiamo che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_r(x) (\partial_j u(x) - \partial_j u(0)) dx = 0.$$

Ora, per la definizione di gradiente in senso distribuzionale, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_r(x) (\partial_j u(x) - \partial_j u(0)) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_r(x) \partial_j u(x) dx - \partial_j u(0) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j \varphi_r(x) u(x) dx - \partial_j u(0) \\ &= - \int_{B_{2r}} \frac{1}{r^{d+1}} (\partial_j \varphi)(x/r) u(x) dx - \partial_j u(0) \\ &= - \int_{B_2} \frac{1}{r} (\partial_j \varphi)(y) u(ry) dy - \partial_j u(0) \\ &= - \int_{B_2} (\partial_j \varphi)(y) \frac{u(ry) - u(0)}{r} dy - \partial_j u(0) \end{aligned}$$

Ora, siccome u è differenziabile in 0

$$\sup_{y \in B_2} \left| \frac{u(ry) - u(0)}{r} - y \cdot V \right|$$

tende a zero per $r \rightarrow 0$. Di conseguenza, passando al limite,

$$- \int_{B_2} \partial_j \varphi(y) y \cdot V dy = \partial_j u(0),$$

e integrando per parti,

$$v_j = \int_{B_2} \varphi(y) v_j dy = \int_{B_2} \varphi(y) \partial_j (y \cdot V) dy = \partial_j u(0),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Come corollario, otteniamo la proposizione seguente.

Teorema 7. *Siano Ω e $\tilde{\Omega}$ due aperti limitati in \mathbb{R}^d . Sia*

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_d) : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$$

una mappa Lipschitziana con inversa

$$\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_d) : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$$

lipschitziana. Allora, per ogni $u \in H_0^1(\tilde{\Omega})$ si ha che $u \circ \Phi \in H_0^1(\Omega)$ e vale la formula

$$\nabla(u \circ \Phi) := D\Phi[\nabla u(\Phi)] \quad \text{quasi-ovunque su } \Omega$$

dove

$$\nabla u := \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_d u \end{pmatrix} \quad e \quad D\Phi := \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi_1 & \dots & \partial_1 \Phi_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_d \Phi_1 & \dots & \partial_d \Phi_d \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Osseviamo che se $u \in C_c^\infty(\tilde{\Omega})$, allora $u \circ \Phi$ è Lipschitz ed ha supporto strettamente contenuto in Ω . Di conseguenza, $u \circ \Phi \in H_0^1(\Omega)$. Inoltre, siccome u , Φ e $u \circ \Phi$ sono differenziabili quasi-ovunque, la formula

$$\nabla(u \circ \Phi) = D\Phi[\nabla u(\Phi)]$$

vale quasi-ovunque in Ω . Sia ora, u_n una successione di funzioni in $C_c^\infty(\tilde{\Omega})$ che converge a $u \in H_0^1(\tilde{\Omega})$ fortemente in H^1 e puntualmente in $\tilde{\Omega}$. Allora, usando il cambio di variabile $y = \Phi(x)$, abbiamo che

$$\int_{\Omega} |u_n(\Phi(x)) - u_m(\Phi(x))|^2 dx = \int_{\tilde{\Omega}} |u_n(y) - u_m(y)|^2 |\det(D\Psi(y))| dy.$$

Di conseguenza, $u_n \circ \Phi$ è di Cauchy in $L^2(\Omega)$. Siccome $u_n \circ \Phi$ converge puntualmente a $u \circ \Phi$, abbiamo che

$$u_n \circ \Phi \rightarrow u \circ \Phi \quad \text{fortemente in } L^2(\Omega).$$

Analogamente, usando la notazione

$$\|A\|_2^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}^2,$$

per una qualsiasi matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix},$$

abbiamo che

$$|Av| \leq \|A\|_2 |v| \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^d,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D\Phi(x)\nabla u_n(\Phi(x)) - D\Phi(x)\nabla u(\Phi(x))|^2 dx &\leq \|D\Phi\|_2^2 \int_{\Omega} |\nabla u_n(\Phi(x)) - \nabla u(\Phi(x))|^2 dx \\ &= \|D\Phi\|_2^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u_n(y) - \nabla u(y)|^2 |\det(D\Psi(y))| dy, \end{aligned}$$

e quindi anche $D\Phi\nabla u_n(\Phi)$ converge fortemente a $D\Phi\nabla u(\Phi)$. Quindi $u \circ \Phi$ è Sobolev e $\nabla(u \circ \Phi) = D\Phi\nabla u(\Phi)$. \square