

Cambio di coordinate e soluzioni di problemi in forma divergenza

CAMBIO DI COORDIANTE LIPSCHITZ

Siano Ω e $\tilde{\Omega}$ due aperti limitati in \mathbb{R}^d . Sia

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_d) : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$$

una mappa Lipschitziana con inversa

$$\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_d) : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$$

lipschitziana. Allora, data una qualsiasi funzione Lebesgue integrabile $F : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, anche la funzione $F \circ \Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è Lebesgue integrabile e si ha

$$\int_{\Omega} F(x) dx = \int_{\tilde{\Omega}} F(\Phi(y)) |\det D\Phi(y)| dy,$$

dove useremo la convenzione

$$D\Phi := \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi_1 & \dots & \partial_1 \Phi_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_d \Phi_1 & \dots & \partial_d \Phi_d \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo inoltre che per ogni $v \in H_0^1(\tilde{\Omega})$, la funzione $v \circ \Phi \in H_0^1(\Omega)$ e vale la formula

$$\nabla(v \circ \Phi) = D\Phi [\nabla v(\Phi)] \quad \text{in } \Omega,$$

dove ricordiamo che per convenzione i gradienti sono vettori colonna.

UNA SOLUZIONE SU Ω

Sia A una matrice simmetrica a coefficienti variabili dati da funzioni reali e misurabili

$$a_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Supponiamo inoltre che A sia uniformemente limitata ed ellittica, ovvero che esistono due costanti $0 < \ell \leq L < +\infty$ tali che

$$\ell \text{Id} \leq A(x) \leq L \text{Id} \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Siano inoltre $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale $F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ e $f \in L^2(\Omega)$ una funzione.

Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole di

$$-\text{div}(A\nabla u) = \text{div} F + f \quad \text{in } \Omega,$$

nel senso che

$$\int_{\Omega} \nabla \phi(x) \cdot A(x) \nabla u(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla \phi(x) \cdot F(x) dx + \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx,$$

per ogni $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

CAMBIO DI COORDINATE

Sia $v \in H^1(\tilde{\Omega})$ una funzione definita come

$$u = v(\Phi).$$

Allora, per ogni $\varphi \in H_0^1(\tilde{\Omega})$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \nabla(\varphi \circ \Phi)(x) \cdot A(x) \nabla u(x) dx &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla(\varphi \circ \Phi)(x) \cdot A(x) \nabla(v \circ \Phi)(x) dx \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} D\Phi(x) \nabla \varphi(\Phi(x)) \cdot A(x) D\Phi(x) \nabla v(\Phi(x)) dx \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla \varphi(\Phi(x)) \cdot \left(D\Phi(x)^t A(x) D\Phi(x) \right) \nabla v(\Phi(x)) dx. \end{aligned}$$

Usando il cambio di coordinate $y = \Phi(x)$ (quindi $x = \Psi(y)$), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \nabla(\varphi \circ \Phi)(x) \cdot A(x) \nabla u(x) dx &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla\varphi(\Phi(x)) \cdot \left(D\Phi(x)^t A(x) D\Phi(x) \right) \nabla v(\Phi(x)) dx \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla\varphi(y) \cdot \left(D\Phi(\Psi(y))^t A(\Psi(y)) D\Phi(\Psi(y)) \right) \nabla v(y) |\det D\Psi(y)| dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla\varphi(y) \cdot \tilde{A}(y) \nabla v(y) dy, \end{aligned}$$

dove

$$\tilde{A}(y) := |\det D\Psi(y)| D\Phi(\Psi(y))^t A(\Psi(y)) D\Phi(\Psi(y)),$$

è una matrice simmetrica, a coefficienti variabili ed uniformemente ellittica su $\tilde{\Omega}$.

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \nabla(\varphi \circ \Phi)(x) \cdot F(x) dx &= \int_{\tilde{\Omega}} D\Phi(x) \nabla\varphi(\Phi(x)) \cdot F(x) dx \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla\varphi(\Phi(x)) \cdot D\Phi(x)^t F(x) dx \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla\varphi(y) \cdot D\Phi(\Psi(y))^t F(\Psi(y)) |\det D\Psi(y)| dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla\varphi(y) \cdot G(y) dy, \end{aligned}$$

dove $G : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ è il campo vettoriale

$$G(y) := |\det D\Psi(y)| D\Phi(\Psi(y))^t F(\Psi(y)).$$

Infine,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(\Phi(x)) f(x) dx &= \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(y) f(\Psi(y)) |\det D\Psi(y)| dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(y) g(y) dy, \end{aligned}$$

dove la funzione $g : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ è data da

$$g(y) := |\det D\Psi(y)| f(\Psi(y)).$$

In conclusione v è soluzione di

$$-\operatorname{div}(\tilde{A}\nabla v) = \operatorname{div} G + g \quad \text{in } \tilde{\Omega}.$$

RADDRIZZAMENTO DEL BORDO DI UN DOMINIO LIPSCHITZ

Siano ora D' un aperto limitato in \mathbb{R}^{d-1} e

$$\eta : D' \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione Lipschitziana. Definiamo i domini

$$\Omega := \left\{ (x, y) \in D' \times \mathbb{R} : y > \eta(x') \right\} \quad \text{e} \quad \tilde{\Omega} := \left\{ (x, z) \in D' \times \mathbb{R} : z > 0 \right\},$$

e le funzioni

$$\Phi(x, y) := (x, y - \eta(x)) \quad \text{e} \quad \Psi(x, z) := (x, z + \eta(x)).$$

Allora,

$$\det D\Psi(x, z) = 1,$$

dove

$$D\Phi(x, y) := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -\partial_1 \eta(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\partial_{d-1} \eta(x) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In particolare,

$$\tilde{A}(x, z) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\partial_1 \eta(x) & \dots & -\partial_{d-1} \eta(x) & 1 \end{pmatrix} A(x, z + \eta(x)) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -\partial_1 \eta(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\partial_{d-1} \eta(x) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mentre

$$G(x, z) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\partial_1 \eta(x) & \dots & -\partial_{d-1} \eta(x) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(x, z + \eta(x)) \\ F_2(x, z + \eta(x)) \\ \vdots \\ F_d(x, z + \eta(x)) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g(x, z) = f(x, z + \eta(x)).$$

In particolare, se u è una funzione armonica in Ω , allora v è una soluzione di

$$-\operatorname{div}(\tilde{A}\nabla v) = 0 \quad \text{in} \quad \tilde{\Omega},$$

dove

$$\tilde{A}(x, z) := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -\partial_1 \eta(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\partial_{d-1} \eta(x) \\ -\partial_1 \eta(x) & \dots & -\partial_{d-1} \eta(x) & 1 + |\nabla_x \eta|^2(x) \end{pmatrix}$$

ESTENSIONI DISPARI

Siano ora D' un aperto limitato in \mathbb{R}^{d-1} e

$$\Omega := \{(x, y) \in D' \times \mathbb{R} : y > 0\} \quad \text{e} \quad \tilde{\Omega} := \{(x, z) \in D' \times \mathbb{R} : z < 0\},$$

e le funzioni

$$\Phi(x, y) := (x, -y) \quad \text{e} \quad \Psi(x, z) := (x, -z).$$

Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = \operatorname{div} F + f \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Allora, la funzione

$$v(x, z) := -u(x, -z),$$

è una soluzione di

$$-\operatorname{div}(\tilde{A}\nabla v) = \operatorname{div} G + g \quad \text{in} \quad \tilde{\Omega},$$

dove

$$\tilde{A}(x, z) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} A(x, -z) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mentre

$$G(x, z) = \begin{pmatrix} -F_1(x, -z) \\ -F_2(x, -z) \\ \vdots \\ -F_{d-1}(x, -z) \\ F_d(x, -z) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g(x, z) = -f(x, -z).$$

Osserviamo inoltre che se $u(x, 0) \equiv 0$, allora la funzione

$$w(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{se } y \geq 0, \\ -u(x, -y) & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

è soluzione debole di

$$-\operatorname{div}(A''\nabla w) = \operatorname{div} H + h \quad \text{in} \quad D' \times \mathbb{R},$$

dove

$$A''(x, y) = \begin{cases} A(x, y) & \text{se } y > 0, \\ \tilde{A}(x, y) & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

$$H(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{se } y > 0, \\ G(x, y) & \text{se } y < 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } y > 0, \\ g(x, y) & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

REGOLARITÀ DELLE FUNZIONI ARMONICHE IN DOMINI LIPSCHITZIANI

Raddrizzando il bordo e riflettendo la soluzione in modo dispari, possiamo ottenere il teorema seguente come conseguenza della regolarità interna delle soluzioni.

Teorema 1. *Sia Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d con bordo Lipschitz. Sia $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana. Allora, la funzione $u \in H^1(\Omega)$, soluzione debole di*

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \phi \quad \text{su } \partial\Omega,$$

è in $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ per un qualche $\alpha > 0$.