Barriere dal basso

Due esempi di funzioni armoniche

Proposizione 1. *Sia $d \geq 3$. Dati $B_r \subset B_R \subset \mathbb{R}^d$, la funzione*

$$u(x) := \frac{|x|^{2-d} - R^{2-d}}{r^{2-d} - R^{2-d}}$$

è una soluzione del problema

$$\Delta u = 0 \quad in \quad B_R \setminus \overline{B}_r \ , \qquad u = 0 \quad on \quad \partial B_R \ , \qquad u = 1 \quad on \quad \partial B_r \, .$$

Proposizione 2. *Dati $B_r \subset B_R \subset \mathbb{R}^2$, la funzione*

$$u(x) := \frac{\ln|x| - \ln r}{\ln R - \ln r}$$

è una soluzione del problema

$$\Delta u = 0 \quad in \quad B_R \setminus \overline{B}_r \ , \qquad u = 0 \quad on \quad \partial B_R \ , \qquad u = 1 \quad on \quad \partial B_r \, .$$

Un'applicazione

Proposizione 3. *In $\mathbb{R}^2$ consideriamo i rettangoli*

$$\mathcal{R} = (-1,1) \times (0,1) \qquad e \qquad \mathcal{R}_\delta = [-1+\delta, 1-\delta] \times [\delta, 1-\delta],$$

dove

$$\delta \in (0, 1/4).$$

Sia $h \in H^1(\mathcal{R})$ una funzione armonica in $\mathcal{R}$ tale che

$$h \geq 1 \quad su \quad \mathcal{R}_\delta \ , \qquad h \geq 0 \quad su \quad \mathcal{R}.$$

Allora, esiste una costante dimensionale $c_d > 0$ tale che

$$h(x,y) \leq c_d \, y \quad per\ ogni \quad (x,y) \in [-1+2\delta, 1-2\delta] \times [0,\delta].$$

Principio del massimo di Hopf

Teorema 4. *In $\mathbb{R}^d$ consideriamo una palla B_R ed il semispazio*

$$H_+ := \Big\{ (x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \ : \ x_d > 0 \Big\}.$$

Sia $u \in H^1(B_R \cap H_+)$ una funzione armonica in $B_R \cap H_+$ e tale che

$$u = 0 \quad su \quad B_R \cap \partial H_+ \ , \qquad u > 0 \quad in \quad B_R \cap H_+.$$

Allora,

$$\partial_{x_d} u(x', 0) > 0 \quad per\ ogni \quad (x', 0) \in B_R \cap \partial H_+.$$