Numeri complessi

Numeri complessi. Somma, prodotto, parte reale e parte immaginaria

Siano $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ e $w = c + id$ $(c, d \in \mathbb{R})$ due numeri complessi. Per definizione, la somma ed il prodotto di w e z sono i seguenti numeri complessi:

$$z + w = (a + c) + i(b + d) \qquad \text{e} \qquad zw = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

In particolare, si ha che

$$i^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = -1 + 0 \cdot i = -1.$$

Inoltre, definiamo la parte reale e la parte immaginaria di $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ come

$$Re\, z = a \qquad \text{e} \qquad Im\, z = b.$$

Diciamo, inoltre, che $z = a + ib$ (dove $a, b \in \mathbb{R}$) è:

- un immaginario puro, se $a = Re\, z = 0$;
- un numero reale, se $b = Im\, z = 0$.

Complesso coniugato

Definizione 1. *Sia $z = a + ib$ (dove $a, b \in \mathbb{R}$) un numero complesso.*
Si dice <u>coniugato di z</u> (e si scrive $\bar{z}$) il numero complesso $\bar{z} = a - ib$.

Proposizione 2. *Siano $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ e $w = c + id$ $(c, d \in \mathbb{R})$ due numeri complessi. Allora valgono le seguenti proprietà:*

(1) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$;

(2) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;

(3) $\bar{\bar{z}} = z$;

(4) $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(5) z *è un numero reale, se e solo se,* $z = \bar{z}$;

(6) z *è un immaginario puro, se e solo se,* $z + \bar{z} = 0$.

Modulo di un numero complesso

Definizione 3. *Sia $z = a + ib$ (dove $a, b \in \mathbb{R}$) un numero complesso.*
Si dice <u>modulo di z</u> il numero reale non-negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposizione 4. *Siano z e w due numeri complessi. Dimostrare che:*

(1) $|z| > 0$;

(2) $|z| = 0$ *se e solo se* $z = 0$;

(3) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

In particolare, la funzione

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \qquad d(w, z) = |w - z|$$

è una distanza. Infatti, valgono le seguenti proprietà:

(1) $|z - w| > 0$ *per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$*;*

(2) $|z - w| = 0$ *se e solo se* $z = w$*;*

(3) $|z - w| \leq |z - h| + |h - w|$ *per ogni* $z, w, h \in \mathbb{C}$.

Proposizione 5. *Sia* $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ *un numero complesso. Allora* $z\bar{z} = |z|^2$. *In particolare, se* $z \neq 0$*, allora* z *ammette un inverso* z^{-1} *dato da*

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Proposizione 6. *Siano* z *e* w *due numeri complessi. Dimostrare che:*

(1) $|z^n| = |z|^n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*;*

(2) $|zw| = |z||w|$*;*

(3) se $w \neq 0$*, allora* $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

Esercizi

Esercizio 7. *Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi.*

$(1 + i)^2 =$

– –

$(2 - i)^2 =$

– –

$(3 - 2i)^2 =$

– –

$(a + ib)^2 =$ $\qquad$ $(a, b \in \mathbb{R})$

– –

$(1 + i)(4 - i) =$

– –

$(1 - i)(2 + 3i) =$

– –

$(1 + i)^3 =$

– –

$(1 - 2i)^3 =$

– –

$(1 + 3i)(1 - 3i) =$

– –

$(3 - 4i)(3 + 4i) =$

– –

$(1 + 3i)^2 + (1 - 3i)^2 =$

– –

– –

Esercizio 8. *Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi.*

$(1-i)^2 =$

$(3-i)^2 =$

$(1+2i)^2 =$

$(4+3i)^2 =$

$(a-ib)^2 =$ $\qquad (a, b \in \mathbb{R})$

$(2+i)(4+3i) =$

$(3+2i)(2-5i) =$

$(2+3i)^3 =$

$(1-4i)(1+4i) =$

$(2+3i)(2-3i) =$

$(a+bi)(a-bi) =$ $\qquad (a, b \in \mathbb{R})$

$(a+bi)^2 + (a-bi)^2 =$ $\qquad (a, b \in \mathbb{R})$

Esercizio 9. *Calcolare le espressioni seguenti*

$Re\,(4+7i) =$ $\qquad Re(-\sqrt{7}+2i) =$

$Im\,(2+3i) =$ $\qquad Im(1-2i) =$

$Re\left[(1+i)(2+i)\right] =$

$Im\left[(1-i)(3+i)\right] =$

$Re\left[(1+2i)^2\right] - \left[Re\,(1+2i)\right]^2 =$

$Im\left[(3-i)^2\right] - \left[Re\,(2+i)\right]^2 =$

$Re\left[i(1+i)\right] =$

$Im\left[(1-2i)^2\right] - \left[Im\,(1-i)\right]^3 =$

$Im\left[(2+i)^2\right] - \left[Re\,(2+i)\right]^2 =$

Esercizio 10. *Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi.*

$$\frac{1-5i}{1+i} =$$

$$\frac{2+i}{1-i} =$$

$$\frac{3+i}{2-i} =$$

$$\frac{1-i}{1+2i} =$$

Esercizio 11. *Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi.*

$$\frac{1+i}{3+4i} =$$

$$\frac{a+ib}{a-ib} = \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\frac{3+2i}{3-2i} =$$

$$\frac{(2-i)^2}{(1+i)^2} =$$

Esercizio 12. *Trovare i valori del parametro reale* $a \in \mathbb{R}$ *per cui il numero compesso* z *a modulo* 1.

$$(a)\ z = \frac{(1+i)}{(1-ai)}\ ; \qquad (b)\ z = \frac{(1+i)^2}{(1+ai)}\ ; \qquad (c)\ z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2(\sqrt{3}+2i)^2}{7(\sqrt{3}+ai)^2}\ ; \qquad (d)\ z = \frac{a+2i}{1-ai}\ .$$

Esercizio 13. *Dimostrare che per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$ *si ha*

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Esercizio 14. *Sia* z *un numero complesso diverso da* i *(*$z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$*). Dimostrare che* $\dfrac{z+i}{1+iz}$ *è un numero reale se e solo se* $|z| = 1$.

Equazioni di secondo grando a coefficienti complessi

Esercizio 15. *Trovare tutte le soluzioni (complesse) delle equazioni seguenti.*

(1) $Z^2 + 3 = 0$;

(2) $Z^2 - Z + 6 = 0$;

(3) $Z^2 - 4Z + 5 = 0$;

(4) $Z^2 - 2Z + 4 = 0$.

Esercizio 16. *Trovare tutte le soluzioni (complesse) delle equazioni seguenti.*

(1) $Z^2 = 8 - 6i$;

(2) $Z^2 = -3 + 4i$;

(3) $Z^2 = 7 + 24i$;

(4) $Z^2 = 9 + 40i$;

(5) $Z^2 = 7 - 24i$;

(6) $Z^2 = 3 + 4i$.

Esercizio 17. *Trovare tutte le soluzioni (complesse) delle equazioni seguenti.*

(1) $z^2 + (1-5i)z + 2i - 6 = 0$;

(2) $z^2 - (3+4i)z + 7i - 1 = 0$;

(3) $2z^2 + (5+i)z + 2 + 2i = 0$;

(4) $z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$;

Due esercizi un po' più difficili

Esercizio 18. *Trovare tutti i numeri complessi* z *tali che*

$$(a)\quad z^2 + |z| - 2 = 0\,; \qquad (b)\quad z|z| - 2z = i\,; \qquad (c)\quad z^2 - z = |z|^2 - |z|\,.$$

Esercizio 19. *Trovare tutti i numeri complessi* z *e* w *tali che*

$$(a)\quad \begin{cases} zw^2 = 1 \\ z^2 + w^4 = 2 \end{cases} \qquad\qquad (b)\quad \begin{cases} z\bar{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1. \end{cases}$$