Successioni di numeri reali

Qui sotto troverete alcune delle proposizioni che dimostreremo la settimana prossima.
Le proposizioni segnate come esercizi sono accessibili agli studenti anche senza l'immediato aiuto del docente.

Il lemma che useremo nella dimostrazione del teorema di Cauchy

Esercizio 1. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione limitata. Per ogni* $n \geq 1$*, poniamo*

$$b_n = \inf\{a_k \ : \ k \geq n\}.$$

Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$*, esiste* $k \geq n$ *tale che*

$$-\varepsilon < a_k - b_n < \varepsilon.$$

Due esercizi sulle successioni

Esercizio 2. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione convergente e sia*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dimostrare che anche la successione $(-a_n)_{n\geq 1}$ *è convergente e*

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -a.$$

Esercizio 3. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione convergente e sia*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Sia $k \in \mathbb{N}$ *un numero intero fissato. Dimostrare che anche la successione* $(b_n)_{n\geq 1}$*, definita come*

$$b_n = a_{n+k} \qquad \textit{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

è convergente e si ha

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Teorema della permanenza del segno

Esercizio 4. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione convergente e sia* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$*. Dimostrare che:*

(1) se $a > 0$*, allora esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$\frac{1}{2}a \leq a_n \leq 2a \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N};$$

(2) se $a < 0$*, allora esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$2a \leq a_n \leq \frac{1}{2}a \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 5 (Teorema della permanenza del segno)**.** *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione convergente e sia* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$*. Dimostrare che:*

(1) se $a > 0$*, allora esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$a_n > 0 \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N};$$

(2) se $a < 0$*, allora esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$a_n < 0 \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 6. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione convergente e sia* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$*. Dimostrare che se* $a > 0$*, allora la successione* $({}^1/{a_n})_{n\geq 1}$ *converge e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

Esercizio 7. *Siano* $(a_n)_{n\geq 1}$ *e* $(b_n)_{n\geq 1}$ *due successioni convergenti con limiti*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \textit{e} \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Usando l'esercizio precedente, dimostrare che se $b \neq 0$*, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Tre teoremi di confronto

Esercizio 8. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione convergente. Dimostrare che se*

$$a_n \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad n \geq 1,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

Esercizio 9. *Siano* $(a_n)_{n\geq 1}$ *e* $(b_n)_{n\geq 1}$ *due successioni convergenti. Dimostrare che se*

$$a_n \leq b_n \quad \textit{per ogni} \quad n \geq 1,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Esercizio 10 (Teorema dei carabinieri)**.** *Siano* $(a_n)_{n\geq 1}$*,* $(b_n)_{n\geq 1}$ *e* $(c_n)_{n\geq 1}$ *tre successioni di numeri reali tali che*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \textit{per ogni} \quad n \geq 1.$$

Dimostrare che, se $(a_n)_{n\geq 1}$ *e* $(b_n)_{n\geq 1}$ *convergono e hanno lo stesso limite* $L \in \mathbb{R}$*, allora anche* $(c_n)_{n\geq 1}$ *converge ed ha limite* L*.*

Sottosuccessioni. Teorema di Bolzano-Weierstrass

Esercizio 11. *Siano* $(A_n)_{n\geq 1}$ *e* $(B_n)_{n\geq 1}$ *due successioni di numeri reali tali che:*

- $(A_n)_{n\geq 1}$ *è monotona crescente:*
$$A_{n+1} \geq A_n \qquad \textit{per ogni} \qquad n \geq 1;$$
- $(B_n)_{n\geq 1}$ *è monotona decrescente:*
$$B_{n+1} \leq A_n \qquad \textit{per ogni} \qquad n \geq 1;$$
- *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $N > 0$ *tale che*
$$|A_n - B_n| < \varepsilon \qquad \textit{per ogni} \qquad n \geq N.$$

Dimostrare che $(A_n)_{n\geq 1}$ *e* $(B_n)_{n\geq 1}$ *convergono e che*
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Teorema 12 (Teorema di Bolzano-Weierstrass)**.** *Ogni successione limitata di numeri reali ammette una sottosuccessione convergente.*

Successioni divergenti

Definizione 13. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione di numeri reali. Diciamo che*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$
se per ogni numero reale $M > 0$ *esiste un numero naturale* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*
$$a_n > M \quad \textit{per ogni indice} \quad n \geq N.$$

Definizione 14. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione di numeri reali. Diciamo che*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$
se per ogni numero reale $M < 0$ *esiste un numero naturale* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*
$$a_n < M \quad \textit{per ogni indice} \quad n \geq N.$$

Esercizio 15. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successioni di numeri reali. Dimostrare che*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$
se e soltanto se
$$\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty.$$

Esercizio 16. *Siano* $(a_n)_{n\geq 1}$ *e* $(b_n)_{n\geq 1}$ *due successioni di numeri reali tali che*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$
Dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty.$$

Esercizio 17. *Siano* $(a_n)_{n\geq 1}$ *e* $(b_n)_{n\geq 1}$ *due successioni di numeri reali tali che*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b > 0.$$
Dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty\,, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

Esercizio 18. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successioni di numeri reali positivi. Dimostrare che*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$
se e soltanto se,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$