Funzioni armoniche in domini regolari - cambio di coordinate

In seguito useremo le notazioni seguenti:

- un intervallo aperto $(-\ell,\ell)$;
- una funzione continua $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$;
- $\mathcal{R}_+ := (-\ell,\ell)\times(0,L)$;
- $\Omega_+ := \Big\{(x,y)\ :\ -\ell<x<\ell\,,\ \eta(x)<y<\eta(x)+L\Big\}$.

Funzioni di Sobolev in domini lipschitziani

Proposizione 1. *Siano $u:\Omega_+\to\mathbb{R}$ e $v:\mathcal{R}_+\to\mathbb{R}$ due funzioni tali che*

$$v(x,y)=u(x,\eta(x)+y).$$

Se $\eta\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, allora:

$$u\in H^1_0(\Omega_+)\quad\Leftrightarrow\quad v\in H^1_0(\mathcal{R}_+)\,.$$

Inoltre, valgono le seguenti formule per le derivate parziali deboli $\partial_i u$ e $\partial_j v$:

$$\begin{cases}\partial_1 v(x,y)=\partial_1 u(x,\eta(x)+y)+\eta'(x)\partial_2 u(x,\eta(x)+y);\\ \partial_2 v(x,y)=\partial_2 u(x,\eta(x)+y).\end{cases}$$

Dimostrazione. Dimostreremo che

$$u\in H^1_0(\Omega_+)\quad\Rightarrow\quad v\in H^1_0(\mathcal{R}_+)\,.$$

Step 1. Sia $\varphi\in C^\infty_c(\Omega_+)$. Definiamo

$$\psi(x,y)=\varphi(x,\eta(x)+y).$$

Dimostreremo che $\psi\in H^1_0(\mathcal{R}_+)$ e che valgono le formule:

$$\begin{cases}\partial_1 \psi(x,y)=\partial_1 \varphi(x,\eta(x)+y)+\eta'(x)\partial_2 \varphi(x,\eta(x)+y);\\ \partial_2 \psi(x,y)=\partial_2 \varphi(x,\eta(x)+y).\end{cases}$$

Sia η_k una successione di funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

- $\eta_k\to\eta$ uniformemente su $(-\ell,\ell)$;
- $\eta_k'\to\eta'$ fortemente in $L^2(-\ell,\ell)$;
- esiste $C>0$ tale che $\|\eta_k'\|_{L^\infty(-\ell,\ell)}\le C$ per ogni $k\ge 1$.

Ponendo

$$\psi_k(x,y)=\varphi(x,\eta_k(x)+y),$$

sappiamo che $\psi_k\in C^1_c(\Omega_+)$ e che valgono le formule:

$$\begin{cases}\partial_1 \psi_k(x,y)=\partial_1 \varphi(x,\eta_k(x)+y)+\eta_k'(x)\partial_2 \varphi(x,\eta_k(x)+y);\\ \partial_2 \psi_k(x,y)=\partial_2 \varphi(x,\eta_k(x)+y).\end{cases}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}|\psi_k(x,y)-\psi(x,y)|&\le|\varphi(x,\eta_k(x)+y)-\varphi(x,\eta(x)+y)|\\ &\le\|\partial_2\varphi\|_{L^\infty}|\eta_k(x)-\eta(x)|.\end{aligned}$$

Di conseguenza la successione ψ_k è di Cauchy in $L^\infty(\mathcal{R}_+)$ e $L^2(\mathcal{R}_+)$. Analogamente

$$\begin{aligned}|\partial_2\psi_k(x,y)-\partial_2\varphi(x,\eta(x)+y)|&\le|\partial_2\varphi(x,\eta_k(x)+y)-\partial_2\varphi(x,\eta(x)+y)|\\ &\le\|\partial_{22}\varphi\|_{L^\infty}|\eta_k(x)-\eta(x)|,\end{aligned}$$

e quindi anche la successione $\partial_2\psi_k$ è di Cauchy in $L^\infty(\mathcal{R}_+)$ e $L^2(\mathcal{R}_+)$. Infine, calcoliamo

$$\begin{aligned}
|\eta_k'(x)\partial_2\varphi(x,\eta_k(x)+y) - \eta'(x)\partial_2\varphi(x,\eta(x)+y)|& \\
&\le |\eta_k'(x)-\eta'(x)||\partial_2\varphi(x,\eta(x)+y)| \\
&\qquad + |\eta_k'(x)|\big|\partial_2\varphi(x,\eta_k(x)+y) - \partial_2\varphi(x,\eta(x)+y)\big| \\
&\le |\eta_k'(x)-\eta'(x)|\,\|\partial_2\varphi\|_{L^\infty} \\
&\qquad + |\eta_k'(x)|\,\big|\eta_k(x)-\eta(x)\big|\,\|\partial_{22}\varphi\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Quindi, anche $\partial_1\psi_k$ è di Cauchy in $L^2(\mathcal{R}_+)$. Questo conclude la dimostrazione di Step 1. Abbiamo dimostrato che se $\varphi \in C^2_c(\Omega_+)$, allora la funzione $\psi(x,y) = \varphi(x,\eta(x)+y)$ è in $H^1_0(\mathcal{R}_+)$ e valgono le formule:

$$\begin{cases}
\partial_1\psi(x,y) = \partial_1\varphi(x,\eta(x)+y) + \eta'(x)\partial_2\varphi(x,\eta(x)+y); \\
\partial_2\psi(x,y) = \partial_2\varphi(x,\eta(x)+y).
\end{cases}$$

Step 2. Sia $u \in H^1_0(\Omega_+)$. Sia Sia $\varphi_n \in C^\infty_c(\Omega_+)$ una successione che converge a u fortemente in $H^1_0(\Omega_+)$. Consideriamo la successione

$$\psi_n(x,y) = \varphi_n(x,\eta(x)+y).$$

Sappiamo che $\psi_n \in H^1_0(\mathcal{R}_+)$ e che valgono le formule:

$$\begin{cases}
\partial_1\psi_n(x,y) = \partial_1\varphi_n(x,\eta(x)+y) + \eta'(x)\partial_2\varphi_n(x,\eta(x)+y); \\
\partial_2\psi_n(x,y) = \partial_2\varphi_n(x,\eta(x)+y).
\end{cases}$$

Ora, siccome

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}_+} |\psi_n - \psi_m|^2 &= \int_0^\ell \int_0^L |\varphi_n(x,\eta(x)+y) - \varphi_m(x,\eta(x)+y)|^2\,dx\,dy \\
&= \int_{\Omega_+} |\varphi_n(x,y) - \varphi_m(x,y)|^2\,dx\,dy\,,
\end{aligned}$$

abbiamo che ψ_n è di Cauchy in $L^2(\mathcal{R}_+)$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}_+} |\partial_2\psi_n - \partial_2\psi_m|^2 &= \int_0^\ell \int_0^L |\partial_2\varphi_n(x,\eta(x)+y) - \partial_2\varphi_m(x,\eta(x)+y)|^2\,dx\,dy \\
&= \int_{\Omega_+} |\partial_2\varphi_n(x,y) - \partial_2\varphi_m(x,y)|^2\,dx\,dy\,,
\end{aligned}$$

quindi anche $\partial_2\psi_n$ è di Cauchy in $L^2(\mathcal{R}_+)$. Infine,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}_+} |\partial_1\psi_n - \partial_1\psi_m|^2 &\le 2\int_0^\ell \int_0^L |\partial_1\varphi_n(x,\eta(x)+y) - \partial_1\varphi_m(x,\eta(x)+y)|^2\,dx\,dy \\
&\qquad + 2\int_0^\ell \int_0^L (g'(x))^2|\partial_2\varphi_n(x,\eta(x)+y) - \partial_2\varphi_m(x,\eta(x)+y)|^2\,dx\,dy \\
&\le 2\int_0^\ell \int_{\eta(x)}^{\eta(x)+L} |\partial_1\varphi_n(x,y) - \partial_1\varphi_m(x,y)|^2\,dy\,dx \\
&\qquad + 2\int_0^\ell \int_{\eta(x)}^{\eta(x)+L} (\eta'(x))^2|\partial_2\varphi_n(x,y) - \partial_2\varphi_m(x,y)|^2\,dy\,dx \\
&= 2\int_{\Omega_+} |\partial_1\varphi_n(x,y) - \partial_1\varphi_m(x,y)|^2\,dx\,dy \\
&\qquad + 2\int_{\Omega_+} (\eta'(x))^2|\partial_2\varphi_n(x,y) - \partial_2\varphi_m(x,y)|^2\,dx\,dy \\
&\le 2\int_{\Omega_+} |\partial_1\varphi_n(x,y) - \partial_1\varphi_m(x,y)|^2\,dx\,dy \\
&\qquad + 2\|\eta'\|_{L^\infty}\int_{\Omega_+} |\partial_2\varphi_n(x,y) - \partial_2\varphi_m(x,y)|^2\,dx\,dy\,,
\end{aligned}$$

il che implica che anche $\partial_1\psi_n$ è di Cauchy in $L^2(\mathcal{R}_+)$. □

Definizione 2. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$; $F \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ un campo vettoriale con componenti in $L^\infty(\Omega)$; $A \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d})$ una matrice a coefficienti variabili (in $L^\infty(\Omega)$). Diciamo che una funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ è soluzione debole del problema*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) = \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u \in H^1_0(\Omega), \end{cases}$$

se

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot A\nabla u\, dx = -\int_\Omega F\cdot\nabla\varphi\, dx \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Proposizione 3. *Sia $F : \Omega_+ \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale*

$$F \in L^\infty(\Omega_+;\mathbb{R}^2)\ , \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix}.$$

Sia $u \in H^1_0(\Omega_+)$ la soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega_+, \\ \ u \in H^1_0(\Omega_+). \end{cases}$$

Allora, la funzione $v \in H^1_0(\mathcal{R}_+)$ definita come

$$v(x,y) = u(x,\eta(x)+y)$$

è soluzione del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla v) = \mathrm{div}\, G \quad \text{in} \quad \mathcal{R}_+\, , \\ \ v \in H^1_0(\mathcal{R}_+). \end{cases}$$

dove $G : \mathcal{R}_+ \to \mathbb{R}^2$ è il campo

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,\eta(x)+y) \\ b(x,\eta(x)+y) - \eta'(x)a(x,\eta(x)+y) \end{pmatrix}$$

e dove A à la seguente matrice simmetrica a coefficienti variabili (in L^∞)

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -\eta'(x) \\ -\eta'(x) & 1+\big(\eta'(x)\big)^2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Data una funzione

$$\psi : \mathcal{R}_+ \to \mathbb{R}\ , \quad \varphi \in C^\infty_c(\mathcal{R}_+),$$

esiste $\varphi \in H^1_0(\Omega_+)$ tale che

$$\psi(x,y) := \varphi(x,\eta(x)+y).$$

Osserviamo che per costruzione valgono le identità:

$$\begin{cases} \partial_1 v(x,y) = \partial_1 u(x,\eta(x)+y) + \eta'(x)\partial_2 u(x,\eta(x)+y); \\ \partial_2 v(x,y) = \partial_2 u(x,\eta(x)+y); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_1 \psi(x,y) = \partial_1 \varphi(x,\eta(x)+y) + \eta'(x)\partial_2 \varphi(x,\eta(x)+y); \\ \partial_2 \psi(x,y) = \partial_2 \varphi(x,\eta(x)+y). \end{cases}$$

Quindi,

$$\begin{cases} \partial_1 u(x,\eta(x)+y) = \partial_1 v(x,y) - \eta'(x)\partial_2 v(x,y); \\ \partial_2 u(x,\eta(x)+y) = \partial_2 v(x,y); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_1 \varphi(x,\eta(x)+y) = \partial_1 \psi(x,y) - \eta'(x)\partial_2 \psi(x,y); \\ \partial_2 \varphi(x,\eta(x)+y) = \partial_2 \psi(x,y); \end{cases}$$

In particolare,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_+} \nabla\varphi(x,y)\cdot\nabla u(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-\ell}^{\ell} dx \int_0^L dy \begin{pmatrix}\partial_1\psi(x,y)-\eta'(x)\partial_2\psi(x,y)\\ \partial_2\psi(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\partial_1 v(x,y)-\eta'(x)\partial_2 v(x,y)\\ \partial_2 v(x,y)\end{pmatrix}\\
&= \int_{\mathcal{R}_+} \Big((\partial_1\psi)^2 - 2\eta'(x)\partial_1\psi\partial_2\psi + \big(1+(\eta'(x))^2\big)(\partial_2\psi)^2\Big)\,dx\,dy\\
&= \int_{\mathcal{R}_+} \begin{pmatrix}\partial_1\psi\\ \partial_2\psi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\eta'(x)\\ -\eta'(x) & 1+(\eta'(x))^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_1 v\\ \partial_2 v\end{pmatrix}\,dx\,dy\\
&= \int_{\mathcal{R}_+} \nabla\psi\cdot A(x,y)\nabla v\,dx\,dy\,.\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_+} \nabla\varphi(x,y)\cdot F(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-\ell}^{\ell} dx \int_{\eta(x)}^{\eta(x)+L} dy \begin{pmatrix}\partial_1\varphi(x,y)\\ \partial_2\varphi(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a(x,y)\\ b(x,y)\end{pmatrix}\,dx\,dy\\
&= \int_{-\ell}^{\ell} dx \int_0^L dy \begin{pmatrix}\partial_1\varphi(x,\eta(x)+y)\\ \partial_2\varphi(x,\eta(x)+y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a(x,\eta(x)+y)\\ b(x,\eta(x)+y)\end{pmatrix}\,dx\,dy\\
&= \int_{-\ell}^{\ell} dx \int_0^L dy \begin{pmatrix}\partial_1\psi(x,y)-\eta'(x)\partial_2\psi(x,y)\\ \partial_2\psi(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a(x,\eta(x)+y)\\ b(x,\eta(x)+y)\end{pmatrix}\\
&= \int_{-\ell}^{\ell} dx \int_0^L dy \begin{pmatrix}\partial_1\psi(x,y)\\ \partial_2\psi(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a(x,\eta(x)+y)\\ b(x,\eta(x)+y)-\eta'(x)a(x,\eta(x)+y)\end{pmatrix}\\
&= \int_{\mathcal{R}_+} \nabla\psi(x,y)\cdot G(x,y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

□

Proposizione 4. *Sia $F:\mathcal{R}_+\to\mathbb{R}^2$ un campo vettoriale*

$$F\in L^\infty(\mathcal{R}_+;\mathbb{R}^2)\,,\quad F(x,y)=\begin{pmatrix}a(x,y)\\ b(x,y)\end{pmatrix}.$$

Sia A una matrice simmetrica a coefficienti variabili (in L^∞)

$$A(x,y)=\begin{pmatrix}1 & -\eta'(x)\\ -\eta'(x) & 1+\big(\eta'(x)\big)^2\end{pmatrix},$$

dove $\eta:(-\ell,\ell)\to\mathbb{R}$ è una funzione Lipschitziana. Sia $u\in H^1(\mathcal{R}+)$ una funzione tale che

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(A\nabla u)=\operatorname{div}F \quad in \quad \mathcal{R}_+\,,\\ u=0 \quad su \quad (-\ell,\ell)\times\{0\}.\end{cases}$$

Definiamo:

- *il dominio*

$$\mathcal{R}=(-\ell,\ell)\times(-L,L);$$

- *il campo*

$$G(x,y)=\begin{cases}\begin{pmatrix}a(x,y)\\ b(x,y)\end{pmatrix} & se \quad y>0\,;\\ \begin{pmatrix}-a(x,-y)\\ b(x,-y)\end{pmatrix} & se \quad y<0\,.\end{cases}$$

- *la matrice a coefficienti variabili*

$$B(x,y)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & -\eta'(x)\\ -\eta'(x) & 1+\big(\eta'(x)\big)^2\end{pmatrix} & se \quad y>0\,;\\ \begin{pmatrix}1 & \eta'(x)\\ \eta'(x) & 1+\big(\eta'(x)\big)^2\end{pmatrix} & se \quad y<0\,.\end{cases}$$

- *la funzione*

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & \textit{se} \quad y > 0\,; \\ -u(x,-y) & \textit{se} \quad y < 0\,. \end{cases}$$

Allora, $v \in H^1(\mathcal{R})$ *ed è una soluzione debole di*

$$-\mathrm{div}\,(B\nabla v) = \mathrm{div}\, G \quad \textit{in} \quad \mathcal{R}\,.$$

Usando le proposizioni precedenti ed il teorema di De Giorgi (che dimostreremo nel prossimo capitolo), otteniamo il seguente teorema.

Teorema 5. *Siano:*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un aperto limitato con bordo Lipschitz;*
- $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione Lipschitziana;*
- $u \in H^1(\Omega)$ *la soluzione debole di*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \textit{in} \quad \Omega\,, \\ \quad u = g \quad \textit{su} \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Allora, $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *per un qualche* $\alpha > 0$.