

Funzioni subarmoniche

DEFINIZIONI EQUIVALENTI PER FUNZIONI C^2

Teorema 1. *Siano Ω un insieme aperto in \mathbb{R}^d ed $u \in C^2(\Omega)$.*

Allora sono equivalenti:

(1) $\Delta u \geq 0$ in senso delle distribuzioni, ovvero:

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx \geq 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{tale che } \varphi \geq 0;$$

(2) for every $x_0 \in \Omega$ la funzione

$$M : (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad M(r) := \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx$$

è crescente sull'intervallo $(0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega))$;

(3) $\Delta u \geq 0$ in senso debole H^1 , ovvero:

$$-\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \geq 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{tale che } \varphi \geq 0;$$

(4) $\Delta u \geq 0$ nel senso classico, ovvero:

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^d \partial_{jj} u(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Osserviamo che il punto

(4) $\Delta u \geq 0$ nel senso classico, ovvero:

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^d \partial_{jj} u(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \Omega;$$

è equivalente a:

(4') $\Delta u \geq 0$ nel senso classico, ovvero:

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \Delta u(x) dx \geq 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{tale che } \varphi \geq 0.$$

Ora, siccome per $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ abbiamo:

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \Delta u(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx,$$

otteniamo subito che

$$(1) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4').$$

Rimane quindi da dimostrare che

$$(4') \Leftrightarrow (2).$$

Dimostriamo prima che (4') \Rightarrow (2). Siccome

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u \right] &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{d\omega_d} \int_{\partial B_1} u(x_0 + rx) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \right] \\ &= \left[\frac{1}{d\omega_d} \int_{\partial B_1} x \cdot \nabla u(x_0 + rx) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \right] \\ &= \left[\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \nu \cdot \nabla u \right] \\ &= \left[\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{B_r(x_0)} \Delta u(x) dx, \right] \end{aligned}$$

otteniamo che la funzione

$$m : (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad m(r) := \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u$$

è crescente sull'intervallo $(0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega))$. Siccome per $s \geq r$ abbiamo

$$\begin{aligned} M(s) - M(r) &= \frac{1}{\omega_d s^d} \int_0^s d\omega_d t^{d-1} m(t) dt - \frac{1}{\omega_d r^d} \int_0^r d\omega_d t^{d-1} m(t) dt \\ &= \frac{1}{\omega_d s^d} \int_0^s d\omega_d t^{d-1} m(t) dt - \frac{1}{\omega_d r^d} \int_0^s d\omega_d \left(\frac{r}{s}t\right)^{d-1} m\left(\frac{r}{s}t\right) \frac{r}{s} dt \\ &= \frac{1}{\omega_d s^d} \int_0^s d\omega_d t^{d-1} \left(m(t) - m\left(\frac{r}{s}t\right) \right) dt \geq 0, \end{aligned}$$

otteniamo (2).

Dimostriamo ora che (2) \Rightarrow (4'). Osserviamo che (2) implica che per ogni $x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) \leq \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \quad \text{per ogni } r \in (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)).$$

Ora, siccome u è C^2 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} u(x_0 + x) &= u(x_0) + x \cdot \nabla u(x_0) + \frac{1}{2} x \cdot \nabla^2 u(x_0) x + |x|^2 \varepsilon(x) \\ &= u(x_0) + \sum_{j=1}^d x_j \partial_j u(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_i x_j \partial_{ij} u(x_0) + |x|^2 \varepsilon(x), \end{aligned}$$

dove $\varepsilon(x)$ è una funzione tale che

$$\varepsilon(x) \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx &= \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} u(x + x_0) dx \\ &= \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \left(u(x_0) + x \cdot \nabla u(x_0) + \frac{1}{2} x \cdot \nabla^2 u(x_0) x + |x|^2 \varepsilon(x) \right) dx \\ &= u(x_0) + \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} x \cdot \nabla u(x_0) dx + \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \frac{1}{2} x \cdot \nabla^2 u(x_0) x dx + \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |x|^2 \varepsilon(x) dx \\ &= u(x_0) + \frac{1}{|B_r|} \frac{1}{2} \int_{B_r} \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \partial_{ii} u(x_0) \right) dx + \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |x|^2 \varepsilon(x) dx \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\int_{B_r} x_i dx = 0 \quad \text{per ogni } i;$$

$$\int_{B_r} x_i x_j dx = 0 \quad \text{per ogni } i \neq j.$$

Ora, usando che

$$\int_{B_r} x_i^2 dx = \frac{1}{d} \int_{B_r} |x|^2 dx = \frac{1}{d} d \omega_d \int_0^r s^2 s^{d-1} ds = \frac{\omega_d}{d+2} r^{d+2},$$

otteniamo che

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx - u(x_0) = \frac{\Delta u(x_0)}{2(d+2)} r^2 + \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |x|^2 \varepsilon(x) dx.$$

Infine, siccome

$$\left| \frac{1}{r^2 |B_r|} \int_{B_r} |x|^2 \varepsilon(x) dx \right| \leq \sup_{x \in B_r} |\varepsilon(x)| \rightarrow 0 \quad (\text{per } r \rightarrow 0),$$

otteniamo che necessariamente $\Delta u(x_0) \geq 0$. □

DEFINIZIONI EQUIVALENTI PER FUNZIONI IN L^1_{loc}

Definizione 2 (Spazio e convergenza L^1_{loc}). *Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ed una funzione Lebesgue misurabile $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, diciamo che $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se $u \in L^1(K)$ per ogni compatto $K \subset \Omega$. Inoltre, data una successione $u_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ diciamo che*

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega),$$

se $\|u_n - u\|_{L^1(K)} \rightarrow 0$ per ogni $K \subset \Omega$.

Teorema 3. *Siano Ω un insieme aperto in \mathbb{R}^d ed $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione Lebesgue misurabile. Allora sono equivalenti:*

(1) $\Delta u \geq 0$ in senso delle distribuzioni, ovvero:

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx \geq 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{tale che } \varphi \geq 0.$$

(2) for every $x_0 \in \Omega$ la funzione

$$M : (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad M(r) := \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx$$

è crescente sull'intervallo $(0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega))$.

Definizione 4 (Funzioni subarmoniche). *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^d ed $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diciamo che u è subarmonica su Ω se valgono le proprietà (1) e (2) del Teorema 3.*

Dimostrazione del Teorema 3. Fissiamo una funzione $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che:

$$\psi \equiv 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus B_1; \quad \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx = 1; \quad \psi \geq 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^d;$$

$$\psi(x) = \psi(-x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo la funzione $\psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ definita come $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \psi(x/\varepsilon)$. Osserviamo che:

$$\psi_\varepsilon \equiv 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon; \quad \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(x) dx = 1; \quad \psi_\varepsilon \geq 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^d;$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(-x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

Supponiamo ora che vale (1). Consideriamo la convoluzione

$$u_\varepsilon(x) := u * \psi_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} u(y)\psi_\varepsilon(x-y) dy.$$

Allora, per ogni palla $B_R(x_0)$ compattamente contenuta in Ω vale che $u_\varepsilon \in C^\infty(B_R)$ e

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{fortemente in } L^1(B_R(x_0)).$$

Inoltre, per ogni funzione test

$$\varphi \in C_c^\infty(B_R(x_0)) \quad \text{tale che } \varphi \geq 0 \quad \text{su } B_R(x_0)$$

vale che

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} u_\varepsilon(x)\Delta\varphi(x) dx &= \int_{B_R(x_0)} \int_{\Omega} u(y)\psi_\varepsilon(x-y) dy \Delta\varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} u(y) \int_{B_R(x_0)} \psi_\varepsilon(x-y) \Delta\varphi(x) dx dy \\ &= \int_{\Omega} u(y) \int_{B_R(x_0)} \psi_\varepsilon(y-x) \Delta\varphi(x) dx dy \\ &= \int_{\Omega} u(y)(\psi_\varepsilon * \Delta\varphi)(y) dy \\ &= \int_{\Omega} u(y)\Delta(\psi_\varepsilon * \varphi)(y) dy. \end{aligned}$$

Siccome

$$\psi_\varepsilon * \varphi(y) = \int \psi_\varepsilon(y-x)\varphi(x) dx \geq 0,$$

otteniamo che

$$\int_{B_R(x_0)} u_\varepsilon(x)\Delta\varphi(x) dx \geq 0.$$

Quindi, $\Delta u_\varepsilon \geq 0$ in $B_R(x_0)$ e di conseguenza, per ogni coppia di raggi $s \geq r$ nell'intervallo $(0, R)$, abbiamo

$$\frac{1}{|B_s|} \int_{B_s(x_0)} u_\varepsilon(x) dx \geq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u_\varepsilon(x) dx.$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ abbiamo

$$\frac{1}{|B_s|} \int_{B_s(x_0)} u(x) dx \geq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx,$$

il che dimostra (2).

Supponiamo che vale (2). Siano $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ una funzione nonnegativa e $K \subset \Omega$ il suo supporto. Poniamo

$$\delta := \text{dist}(K, \partial\Omega),$$

e definiamo l'aperto

$$\Omega_{\delta/2} := \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta/2 \right\}.$$

Allora, la convoluzione

$$\left(u * \left(\frac{1}{|B_r|} \mathbb{1}_{B_r} \right) \right)(x) = \int_{\Omega} u(y-x) \frac{1}{|B_r|} \mathbb{1}_{B_r}(x) dx$$

è ben definita quando $x \in \Omega_{\delta/2}$ e $r \in (0, \delta/2)$. Inoltre, vale

$$\int_{\Omega} u(y-x) \frac{1}{|B_r|} \mathbb{1}_{B_r}(x) dx = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y) dy$$

e quindi, per ogni $r \in (0, \delta/2)$,

$$\left(u * \left(\frac{1}{|B_r|} \mathbf{1}_{B_r} \right) \right) \geq u \quad \text{su } \Omega_{\delta/2}.$$

Ora, prendendo la convoluzione con ψ_ε per un qualche $\varepsilon \in (0, \delta/4)$ otteniamo che

$$(\psi_\varepsilon * u) * \left(\frac{1}{|B_r|} \mathbf{1}_{B_r} \right) = \psi_\varepsilon * \left(u * \left(\frac{1}{|B_r|} \mathbf{1}_{B_r} \right) \right) \geq \psi_\varepsilon * u \quad \text{su } \Omega_{\delta/4}.$$

Di conseguenza, $\psi_\varepsilon * u$ ha la proprietà (2) su $\Omega_{\delta/4}$ (per ogni raggio $r < \delta/2$). Siccome $\psi_\varepsilon * u \in C^\infty$, otteniamo che

$$0 \leq \int_{\Omega_{\delta/4}} \Delta(\psi_\varepsilon * u) \varphi = \int_{\Omega_{\delta/4}} (\psi_\varepsilon * u) \Delta \varphi.$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo

$$\int_{\Omega_{\delta/4}} u \Delta \varphi \geq 0,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Come corollario otteniamo il seguente teorema.

Corollario 5 (Definizioni equivalenti per funzioni in H_{loc}^1). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto. Data una funzione $u \in H_{loc}^1(\Omega)$, sono equivalenti:*

(1) $\Delta u \geq 0$ in senso delle distribuzioni, ovvero:

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx \geq 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{tale che } \varphi \geq 0;$$

(2) for every $x_0 \in \Omega$ la funzione

$$M : (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad M(r) := \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx$$

è decrescente sull'intervallo $(0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega))$;

(3) $\Delta u \geq 0$ in senso debole H^1 , ovvero:

$$-\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \geq 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{tale che } \varphi \geq 0.$$

ESEMPI DI FUNZIONI SUBARMONICHE

Esempio 6. *Sia $\nu \in \mathbb{R}^d$ un vettore non nullo. Allora, la funzione $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = (x \cdot \nu)_+$, è subarmonica.*

Più in generale vale la seguente proposizione.

Proposizione 7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto. Siano $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$ due funzioni subarmoniche. Allora, la funzione $u \vee v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione subarmonica.*

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proprietà della media. □

Esempio 8. *Ogni funzione convessa su \mathbb{R}^d è subarmonica.*

Esempio 9. In dimensione $d = 2$, dato un raggio $R > 0$, consideriamo la funzione

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := \begin{cases} \ln|x| & \text{se } |x| > R; \\ \ln R & \text{se } |x| \leq R. \end{cases}$$

Allora, la funzione φ è subarmonica su \mathbb{R}^2 .

Esempio 10. In dimensione $d \geq 3$, dato un raggio $R > 0$, consideriamo la funzione

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := \begin{cases} |x|^{2-d} & \text{se } |x| > R; \\ \ln R^{2-d} & \text{se } |x| \leq R. \end{cases}$$

Allora, la funzione φ è subarmonica su \mathbb{R}^2 .

Proposizione 11. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se esiste una successione di funzioni $u_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ subarmoniche su Ω tale che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega),$$

allora u è subarmonica.

Dimostrazione. Segue direttamente dalla formulazione in senso distribuzionale. Infatti, per ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, abbiamo:

$$\int_{\Omega} u_n \Delta \varphi \rightarrow \int_{\Omega} u \Delta \varphi.$$

□

Corollario 12. La seguente funzione è subarmonica su \mathbb{R}^2 .

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := \ln|x|.$$

Corollario 13. La seguente funzione è subarmonica su \mathbb{R}^d , per $d \geq 3$.

$$\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := -|x|^{2-d}.$$

DEFINIZIONE PUNTUALE E SEMICONTINUITÀ DELLE FUNZIONI SUBARMONICHE

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione subarmonica su Ω . Allora, per ogni $x_0 \in \Omega$, la funzione

$$M : (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad M(r) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx,$$

è monotona crescente. Di conseguenza, esiste il limite

$$L_u(x_0) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx.$$

La funzione

$$L_u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

è definita in ogni punto di Ω ed è Lebesgue misurabile. Inoltre, L_u è un rappresentante della classe di equivalenza di u . D'ora in poi, identificheremo ogni funzione subarmonica u con il suo rappresentante L_u . In questo modo possiamo scrivere:

$$u(x_0) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx.$$

Proposizione 14. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione subarmonica su Ω . Allora, la funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è semicontinua superiormente, ovvero per ogni successione

$$\Omega \ni x_n \rightarrow x_0 \in \Omega,$$

si ha che

$$u(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} u(x_n).$$

Dimostrazione. Sia r un raggio tale per cui $r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Allora

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_n)} u(x) dx \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} u(x_n).$$

Passando al limite per $r \rightarrow 0$, otteniamo

$$u(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} u(x_n).$$

□

Proposizione 15. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se esiste una successione di funzioni $u_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ subarmoniche su Ω tale che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega),$$

allora, per ogni $x \in \Omega$

$$u(x) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} u(x_n).$$

Se, inoltre, u_n è una successione decrescente, allora

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Come nella proposizione precedente, sia r un raggio tale per cui $r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Allora

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u_n(x) dx \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0).$$

Passando al limite per $r \rightarrow 0$, otteniamo

$$u(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0).$$

Per dimostrare la seconda affermazione prendiamo $x_0 \in \Omega$ e poniamo

$$\ell(x_0) := \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x_0).$$

Per quanto già dimostrato sopra, abbiamo che

$$u(x_0) \geq \ell(x_0).$$

Consideriamo prima il caso $\ell(x_0) > -\infty$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $n \geq 1$ e $r > 0$ tali che

$$|\ell(x_0) - u_n(x_0)| \leq \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad \left| u_n(x_0) - \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u_n(x) dx \right| \leq \varepsilon/2.$$

Quindi

$$0 \leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u_n(x) dx - \ell(x_0) \leq \varepsilon.$$

Ora, siccome u_n è decrescente, abbiamo che

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u_n(x) dx.$$

Quindi

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \leq \ell(x_0) + \varepsilon.$$

e di conseguenza

$$u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \leq \ell(x_0) + \varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario, otteniamo:

$$u(x_0) \leq \ell(x_0).$$

Consideriamo ora il caso $\ell(x_0) = -\infty$. Allora, per ogni $C > 0$, esistono $n > 0$ ed $r > 0$ tali che

$$u_n(x_0) \leq -2C \quad \text{e} \quad \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u_n(x) dx \leq -C.$$

A questo punto, possiamo concludere come nel caso precedente. Siccome u_n è decrescente, abbiamo:

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u_n(x) dx.$$

Quindi

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \leq -C.$$

e di conseguenza

$$u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \leq -C.$$

Siccome C è arbitrario, otteniamo che anche $u(x_0) = -\infty$. □

Definizione 16. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione subarmonica su Ω . Allora, l'insieme dei punti $x_0 \in \Omega$ tali che

$$u(x_0) = -\infty$$

si chiama insieme polare di u .

In ogni dimensione $d \geq 2$ esistono funzioni subarmoniche con insieme polare non vuoto.

Proposizione 17. Sia $d = 2$. Esiste una funzione $u \in H^1_0(B_1)$ tale che:

- u è subarmonica in B_1 ;
- $u(0) = -\infty$.

Dimostrazione. Per ogni $R \in (0, 1)$ definiamo la funzione

$$\varphi_R : B_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_R(x) := \begin{cases} -\frac{\ln|x|}{\ln R} & \text{se } |x| > R; \\ -1 & \text{se } |x| \leq R. \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$\varphi_R = 0 \quad \text{su } \partial B_1, \quad \varphi_R = -1 \quad \text{in } \overline{B}_R, \quad -1 \leq \varphi_R \leq 0 \quad \text{in } B_1 \setminus B_R.$$

Inoltre,

$$|\nabla \varphi_R|(x) = \frac{1}{|\ln R|} \frac{1}{|x|} \quad \text{in } B_1 \setminus B_R,$$

ed in particolare

$$\int_{B_1} |\nabla \varphi_R|^2 dx = \int_{B_1 \setminus B_R} \frac{1}{|x|^2 (\ln R)^2} dx = 2\pi \int_R^1 \frac{r dr}{r^2 (\ln R)^2} = \frac{2\pi}{|\ln R|}.$$

Consideriamo ora la serie

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_k \varphi_{R_k}(x).$$

Scegliendo

$$R_k = e^{-k^4}, \\ c_k = 1$$

abbiamo che

$$\int_{B_1} |c_k \nabla \varphi_{R_k}|^2 dx = \frac{2\pi c_k^2}{|\ln R_k|} = \frac{2\pi}{k^4},$$

In particolare, la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|c_k \phi_{R_k}\|_{H^1(B_1)}$$

e convergente. Quindi la successione di funzioni

$$u_n := \sum_{k=1}^n c_k \phi_{R_k}$$

converge fortemente in H^1 , è decrescente e $u_n(0) = n$. Quindi il suo limite

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

è una funzione in $H_0^1(B_1)$, subarmonica in B_1 e tale che $u(0) = -\infty$. □

Esistono inoltre funzioni subarmoniche limitate, ma discontinue.

Proposizione 18. *Sia $d = 2$. Per ogni successione decrescente di numeri reali positivi $a_n \rightarrow 0$, esiste una funzione $u \in H^1(B_{1/2})$ tale che:*

- u è subarmonica in $B_{1/2}$;
- $u(0,0) \geq -1/2$;
- $u(a_n,0) \leq -1$ per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. Sia $X_n := (a_n, 0)$. Come nella dimostrazione precedente, definiamo:

$$\varphi_R : B_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_R(x) := \begin{cases} -\frac{\ln|x|}{\ln R} & \text{se } |x| > R; \\ -1 & \text{se } |x| \leq R. \end{cases}$$

Consideriamo la funzione

$$\psi_n := \varphi_{R_n}(x - X_n),$$

dove scegliamo il raggio R_n abbastanza piccolo per avere:

$$-\frac{1}{4^n} \leq \psi_n(0,0).$$

Inoltre, possiamo scegliere la successione dei taggi R_n in modo tale che:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|\psi_k\|_{H^1(B_1)} < +\infty.$$

Quindi esiste il limite $u \in H^1(B_1)$ della serie

$$u := \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j.$$

Quindi,

$$u(0,0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j(0,0) \geq \sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4^j}\right) = -\frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{3}.$$

D'altra parte, per ogni k ,

$$u(x_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j(x_k) \leq \psi_k(x_k) \leq -1. \quad \square$$

FUNZIONI SUBARMONICHE E FUNZIONI OLOMORFE

Proposizione 19. *Sia Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Allora, per ogni funzione olomorfa $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, la funzione $f = \ln |h|$ è subarmonica su Ω .*

Dimostrazione. Osserviamo che se z_0 è uno zero di h , allora possiamo scrivere

$$h(z) = (z - z_0)^n h_1(z),$$

dove $h(z_0) \neq 0$. Quindi

$$\ln |h(z)| = \ln \left| (z - z_0)^n h_1(z) \right| = n \ln |z - z_0| + \ln |h_1(z)|.$$

Siccome $\ln |z - z_0|$ è subarmonica, è sufficiente dimostrare che $\ln |h_1(z)|$ è subarmonica. Possiamo supporre quindi che $h(z) \neq 0$. Scrivendo h come

$$h(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

abbiamo che

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{e} \quad \partial_y u = -\partial_x v.$$

In particolare,

$$\begin{aligned} \partial_x \left(\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \right) &= \frac{uu_x + vv_x}{u^2 + v^2} \\ \partial_y \left(\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \right) &= \frac{uu_y + vv_y}{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \partial_{xx} \left(\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \right) &= \partial_x \left[\frac{uu_x + vv_x}{u^2 + v^2} \right] = \frac{uu_{xx} + vv_{xx} + u_x^2 + v_x^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_x + vv_x)^2}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{uu_{xx} + vv_{xx} + u_x^2 + u_y^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_x - vv_y)^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_{yy} \left(\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \right) &= \partial_y \left[\frac{uu_y + vv_y}{u^2 + v^2} \right] = \frac{uu_{yy} + vv_{yy} + u_y^2 + v_y^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_y + vv_y)^2}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{uu_{yy} + vv_{yy} + u_y^2 + u_x^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_y + vv_x)^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

Di conseguenza, siccome $\Delta u = \Delta v \equiv 0$ in Ω , abbiamo:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \right) &= \frac{u_x^2 + u_y^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_x - vv_y)^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{u_y^2 + u_x^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_y + vv_x)^2}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{2}{(u^2 + v^2)^2} \left((u_x^2 + u_y^2)(u^2 + v^2) - (uu_x - vv_y)^2 - (uu_y + vv_x)^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Quindi $\ln |h|$ è armonica dove $\{|h| \neq 0\}$ il che conclude la dimostrazione. \square