Teorema della regolarità ellittica.
Parte III. Regolarità interna e fino al bordo - il caso generale

Regolarità interna

Teorema 1 (Regolarità ellittica - regolarità interna). *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$. Sia*

$$A : \Omega \to S_d(\mathbb{R})$$

una matrice $d \times d$ simmetrica a coefficienti variabili

$$a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R},$$

tale che

- *le funzioni a_{ij} sono lipschitziane su Ω $\big(\|\nabla a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty\big)$;*
- *la matrice A è limitata e uniformemente ellittica, ovvero esistono costanti $0 < \ell \le L < +\infty$ tali che*

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A(x) \le L\,\mathrm{Id} \qquad \text{per quasi-ogni} \qquad x \in \Omega\,.$$

e $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole di

$$-\mathrm{div}\big(A\nabla u\big) = f \quad \text{in} \quad \Omega\,.$$

Allora, per ogni $D \Subset \Omega$, $u \in H^2(D)$. Inoltre, per ogni $j = 1, \dots, d$,

$$-\mathrm{div}\big(A\nabla(\partial_j u)\big) = \mathrm{div}\big(F_j + (\partial_j A)\nabla u\big) \quad \text{in} \quad \Omega\,,$$

dove i coefficienti della matrice $\partial_j A$ sono le derivate deboli dei coefficienti di A; mentre $F_j(x) = f(x)e_j$ è il campo vettoriale

$$F_j = (0, \dots, f, \dots, 0) : \Omega \to \mathbb{R}^d.$$

Proof. Sia $\psi \in H^1_0(\Omega)$ una funzione a supporto compatto in Ω. Allora, per ogni $y \in \mathbb{R}^d$ con norma abbastanza piccola $|y| << 1$, abbiamo

$$\int_\Omega \nabla\psi(x) \cdot A(x)\nabla u(x)\,dx = \int_\Omega \psi(x) f(x)\,dx\,,$$

$$\int_\Omega \nabla\psi(x) \cdot A(x)\nabla u(x+y)\,dx = -\int_\Omega \nabla\psi(x) \cdot \big(A(x+y) - A(x)\big)\nabla u(x+y)\,dx + \int_\Omega \psi(x) f(x+y)\,dx\,.$$

Dato $D \Subset \Omega$, scegliamo una funzione $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ tale che $\varphi = 1$ su D e $0 \le \varphi \le 1$ su Ω; fissiamo $y \in \mathbb{R}^d$, con $|y|$ abbastanza piccolo, e infine consideriamo la funzione

$$v(x) = \frac{u(x+y) - u(x)}{|y|}.$$

Osserviamo che

$$-\mathrm{div}\big(A\nabla v\big) = \frac{1}{|y|}\Big(f(x+y) - f(x)\Big) + \frac{1}{|y|}\mathrm{div}\Big(\big(A(x+y) - A(x)\big)\nabla u(x+y)\Big)$$

in senso debole H^1 in un intorno del supporto di φ. Quindi possiamo usare la funzione $\varphi^2 v$ come funzione test:

$$\int \nabla(\varphi^2 v) \cdot A(x)\nabla v\,dx = \int \frac{1}{|y|}\Big(f(x+y) - f(x)\Big)\varphi^2 v\,dx - \frac{1}{|y|}\int_\Omega \nabla(\varphi^2 v) \cdot \big(A(x+y) - A(x)\big)\nabla u(x+y)\,dx.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\int |\nabla(v\varphi)|^2\,dx &\le \frac{1}{\ell}\int \nabla(v\varphi) \cdot A(x)\nabla(v\varphi), dx \\
&= \frac{1}{\ell}\int \nabla(v\varphi^2) \cdot A(x)\nabla v\,dx + \frac{1}{\ell}\int v^2\nabla\varphi \cdot A(x)\nabla\varphi\,dx \\
&\le \frac{1}{\ell}\int \nabla(v\varphi^2) \cdot A(x)\nabla v\,dx + \frac{L}{\ell}\int |\nabla\varphi|^2 v^2\,dx.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int \frac{1}{|y|}\Big(f(x+y)-f(x)\Big)\varphi^2 v\,dx\Big| \\
&\quad=\Big|\int \frac{1}{|y|}\Big(f(x+y)-f(x)\Big)\frac{1}{|y|}\Big(u(x+y)-u(x)\Big)\varphi^2(x)\,dx\Big| \\
&\quad=\left|\frac{1}{|y|^2}\int f(x)\Big(u(x)\varphi^2(x-y)-u(x-y)\varphi^2(x-y)-u(x+y)\varphi^2(x)+u(x)\varphi^2(x)\Big)\,dx\right| \\
&\quad=\left|-\frac{1}{|y|}\int f(x)\left(\frac{u(x+y)-u(x)}{|y|}\varphi^2(x)-\frac{u(x)-u(x-y)}{|y|}\varphi^2(x-y)\right)\,dx\right|\le\|f\|_{L^2}\|\nabla(v\varphi^2)\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

Inoltre, siccome i coefficienti di A sono funzioni Lipschitziane, abbiamo

$$\Big|\frac{1}{|y|}\int_\Omega \nabla(\varphi^2 v)\cdot\big(A(x+y)-A(x)\big)\nabla u(x+y)\,dx\Big|\le C_A\|\nabla(\varphi^2 v)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Mettendo insieme le stime, otteniamo

$$\int_\Omega|\nabla(v\varphi)|^2\,dx\le\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(v\varphi^2)\|_{L^2(\Omega)}+C_A\|\nabla(\varphi^2 v)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}+\frac{L}{\ell}\int_\Omega|\nabla\varphi|^2v^2\,dx.$$

Questa disuguaglianza implica che

$$\|\nabla v\|_{L^2(D)}\le\|\nabla(v\varphi)\|_{L^2(\Omega)}\le C,$$

dove C è una costante che dipende da Ω, f e φ. Usando la definizione di v otteniamo

$$\partial_j u\in H^1(D)\quad\text{per ogni}\quad j=1,\dots,d.$$

□

Regolarità fino al bordo

Teorema 2 (Regolarità ellittica - regolarità fino al bordo)**.** *Siano $B_R\subset\mathbb{R}^d$, $f\in L^2(B_R^+)$ ed $A:B_R^+\to S_d(\mathbb{R})$ una matrice $d\times d$ simmetrica a coefficienti variabili*

$$a_{ij}:B_R^+\to\mathbb{R},$$

tale che

- *le funzioni a_{ij} sono lipschitziane su B_R^+ $\big(\|\nabla a_{ij}\|_{L^\infty(B_R^+)}<+\infty\big)$;*
- *la matrice A è limitata e uniformemente ellittica, ovvero esistono costanti $0<\ell\le L<+\infty$ tali che*

$$\ell\,\mathrm{Id}\le A(x)\le L\,\mathrm{Id}\qquad\text{per quasi-ogni}\qquad x\in B_R^+.$$

e $u\in H^1(B_R^+)$ una soluzione debole di

$$-\mathrm{div}\big(A\nabla u\big)=f\quad\text{in}\quad B_R^+,\qquad u=0\quad\text{su}\quad B'_R.$$

Allora, $u\in H^2(B_r^+)$ per ogni $r<R$. Inoltre, per ogni $j=1,\dots,d$,

$$-\mathrm{div}\big(A\nabla(\partial_j u)\big)=\mathrm{div}\big(F_j+(\partial_j A)\nabla u\big)\quad\text{in}\quad B_r^+,$$

dove $F_j(x)=f(x)e_j$.

Proof. Osserviamo che per il teorema precedente abbiamo che

$$\partial_i u\in H^1_{loc}(B_R^+)\quad\text{per ogni}\quad i=1,\dots,d.$$

Quindi, basta dimostrare che le derivate deboli $\partial_{ij}u$ sono in $L^2(B_R^+)$ per ogni $i,j=1,\dots,d$.

Per ogni $j=1,\dots,d-1$ e per ogni $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, consideriamo le funzione

$$v_j(x)=\frac{u(x+he_j)-u(x)}{h}.$$

ed osserviamo che se prendiamo una funzione $\varphi\in C_c^\infty(B_R)$ come nella dimostrazione del teorema precedente, allora $v_j\varphi^2\in H^1_0(B_R^+)$ e quindi possiamo usare $v_j\varphi^2$ come funzione test nell'equazione per v_j.

$$-\mathrm{div}\big(A\nabla v_j\big)=\frac{1}{h}\Big(f(x+he_j)-f(x)\Big)+\frac{1}{h}\mathrm{div}\Big(\big(A(x+he_j)-A(x)\big)\nabla u(x+he_j)\Big)$$

in senso debole H^1 in un intorno del supporto di φ. Quindi possiamo usare la funzione $\varphi^2 v$ come funzione test:

$$\int \nabla(\varphi^2 v)\cdot A(x)\nabla v\,dx = \int \frac{1}{|y|}\Big(f(x+y)-f(x)\Big)\varphi^2 v\,dx - \frac{1}{|y|}\int_\Omega \nabla(\varphi^2 v)\cdot\big(A(x+y)-A(x)\big)\nabla u(x+y)\,dx.$$

Come nella dimostrazione del teorema all'interno, otteniamo

$$\int_\Omega |\nabla(v_j\varphi)|^2\,dx \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(v_j\varphi^2)\|_{L^2(\Omega)} + C_A\|\nabla(\varphi^2 v_j)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{L}{\ell}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 v_j^2\,dx.$$

e come conseguenza

$$\|\nabla v_j\|_{L^2(B_r^+)} \le \|\nabla(v_j\varphi)\|_{L^2(B_R)} \le C,$$

dove C è una costante che dipende da Ω, f, φ e $\|u\|_{H^1(B_R^+)}$.

$$\partial_{ij}u \in L^2(D) \quad \text{per ogni} \quad i=1,\dots,d \quad \text{e per ogni} \quad j=1,\dots,d-1.$$

Infine, usando l'identità puntuale

$$-\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) - \sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d \partial_i a_{ij}(x)\partial_j u(x) = -\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d \partial_i\big(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\big) = f(x) \quad \text{in} \quad B_R^+\,,$$

otteniamo che

$$a_{dd}(x)\partial_{dd}u(x) \in L^2(B_r^+).$$

Ora, siccome A è una matrice ellittica, abbiamo la stima dal basso

$$a_{dd}(x) = e_d\cdot A(x)e_d \ge \ell > 0,$$

e quindi otteniamo $\partial_{dd}u(x)\in L^2(B_r^+)$. □

Corollario 3. *Siano $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un dominio limitato di classe $C^{1,1}$, $v\in H^2(\Omega)$ ed $f\in L^2(\Omega)$. Se $u\in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\,, \qquad u = v \quad su \quad \partial\Omega,$$

allora $u\in H^2(\Omega)$.

Applicazioni

Teorema 4 (Problema di Poisson con dati regolari)**.** *Siano $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un dominio limitato di classe C^∞ e siano $v\in C^\infty(\overline{\Omega})$ e $f\in C^\infty(\Omega)$. Se $u\in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\,, \qquad u = v \quad su \quad \partial\Omega,$$

allora $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Teorema 5 (Funzioni armoniche con dati regolari)**.** *Siano $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un dominio limitato di classe C^∞ e sia $v\in C^\infty(\overline{\Omega})$. Se $u\in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema*

$$-\Delta u = 0 \quad in \quad \Omega\,, \qquad u = v \quad su \quad \partial\Omega,$$

allora $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Teorema 6 (Autofunzioni in domini regolari)**.** *Siano $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un dominio limitato di classe C^∞. Se $u\in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema*

$$-\Delta u = \lambda u \quad in \quad \Omega\,, \qquad u = 0 \quad su \quad \partial\Omega,$$

allora $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$.