Cambio di coordinate e problemi ellittici con operatori in forma di divergenza

Cambio di coordiante Lipschitz

Siano Ω e $\widetilde{\Omega}$ due aperti limitati in $\mathbb{R}^d$. Sia

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_d) : \Omega \to \widetilde{\Omega}$$

una mappa Lipschitziana con inversa

$$\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_d) : \widetilde{\Omega} \to \Omega$$

lipschitziana. Allora, data una qualsiasi funzione Lebesgue integrabile $F : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, anche la funzione $F \circ \Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ è Lebesgue integrabile e si ha

$$\int_{\Omega} F(x)\,dx = \int_{\widetilde{\Omega}} F\big(\Phi(y)\big)\,|\det D\Phi(y)|\,dy,$$

dove useremo la convenzione

$$D\Phi := \begin{pmatrix} \partial_1\Phi_1 & \dots & \partial_1\Phi_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_d\Phi_1 & \dots & \partial_d\Phi_d \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo inoltre che per ogni $v \in H^1_0(\widetilde{\Omega})$, la funzione $v \circ \Phi \in H^1_0(\Omega)$ e vale la formula

$$\nabla(u \circ \Phi) = D\Phi\big[\nabla u(\Phi)\big] \quad \text{in} \quad \Omega,$$

dove ricordiamo che per convenzione i gradienti sono vettori colonna.

Una soluzione su Ω

Sia A una matrice simmetrica a coefficienti variabili dati da funzioni reali e misurabili

$$a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Supponiamo inoltre che A sia uniformemente limitata ed ellittica, ovvero che esistono due costanti $0 < \ell \le L < +\infty$ tali che

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A(x) \le L\,\mathrm{Id} \qquad \text{per ogni} \qquad x \in \Omega.$$

Siano inoltre $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale $F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ e $f \in L^2(\Omega)$ una funzione.

Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole di

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = \mathrm{div}\,F + f \quad \text{in} \quad \Omega,$$

nel senso che

$$\int_{\Omega} \nabla\phi(x) \cdot A(x)\nabla u(x)\,dx = -\int_{\Omega} \nabla\phi(x) \cdot F(x)\,dx + \int_{\Omega} f(x)\phi(x)\,dx,$$

per ogni $\phi \in H^1_0(\Omega)$.

Cambio di coordinate

Sia $v \in H^1(\widetilde{\Omega})$ una funzione definita come

$$u = v(\Phi).$$

Allora, per ogni $\varphi \in H^1_0(\widetilde{\Omega})$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\Omega}} \nabla(\varphi \circ \Phi)(x) \cdot A(x)\nabla u(x)\,dx &= \int_{\widetilde{\Omega}} \nabla(\varphi \circ \Phi)(x) \cdot A(x)\nabla(v \circ \Phi)(x)\,dx \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}} D\Phi(x)\nabla\varphi(\Phi(x)) \cdot A(x)D\Phi(x)\nabla v(\Phi(x))\,dx \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}} \nabla\varphi(\Phi(x)) \cdot \Big(D\Phi(x)^t A(x) D\Phi(x)\Big)\nabla v(\Phi(x))\,dx.
\end{aligned}$$

Usando il cambio di coordinate $y = \Phi(x)$ (quindi $x = \Psi(y)$), si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde\Omega} \nabla(\varphi\circ\Phi)(x)\cdot A(x)\nabla u(x)\,dx &= \int_{\widetilde\Omega} \nabla\varphi(\Phi(x))\cdot \Big(D\Phi(x)^t A(x) D\Phi(x)\Big)\nabla v(\Phi(x))\,dx\\ &= \int_{\Omega} \nabla\varphi(y)\cdot \Big(D\Phi(\Psi(y))^t A(\Psi(y)) D\Phi(\Psi(y))\Big)\nabla v(y)\,\big|\det D\Psi(y)\big|\,dy\\ &= \int_{\Omega} \nabla\varphi(y)\cdot \widetilde A(y)\nabla v(y)\,dy,\end{aligned}$$

dove

$$\widetilde A(y) := \big|\det D\Psi(y)\big|\, D\Phi(\Psi(y))^t A(\Psi(y)) D\Phi(\Psi(y)),$$

è una matrice simmetrica, a coefficienti variabili ed uniformemente ellittica su $\widetilde\Omega$.

Analogamente,

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde\Omega} \nabla(\varphi\circ\Phi)(x)\cdot F(x)\,dx &= \int_{\widetilde\Omega} D\Phi(x)\nabla\varphi(\Phi(x))\cdot F(x)\,dx\\ &= \int_{\widetilde\Omega} \nabla\varphi(\Phi(x))\cdot D\Phi(x)^t F(x)\,dx\\ &= \int_{\Omega} \nabla\varphi(y)\cdot D\Phi(\Psi(y))^t F(\Psi(y))\,\big|\det D\Psi(y)\big|\,dy\\ &= \int_{\Omega} \nabla\varphi(y)\cdot G(y)\,dy,\end{aligned}$$

dove $G : \widetilde\Omega \to \mathbb{R}^d$ è il campo vettoriale

$$G(y) := \big|\det D\Psi(y)\big|\, D\Phi(\Psi(y))^t F(\Psi(y)).$$

Infine,

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde\Omega} \varphi(\Phi(x)) f(x)\,dx &= \int_{\Omega} \varphi(y) f(\Psi(y))\,\big|\det D\Psi(y)\big|\,dy\\ &= \int_{\Omega} \varphi(y) g(y)\,dy,\end{aligned}$$

dove la funione $g : \widetilde\Omega \to \mathbb{R}$ è data da

$$g(y) := \big|\det D\Psi(y)\big|\, f(\Psi(y)).$$

In conclusione v è soluzione di

$$-\mathrm{div}(\widetilde A\nabla v) = \mathrm{div}\, G + g \quad \text{in} \quad \widetilde\Omega.$$

Raddrizzamento del bordo di un dominio Lipschitz

Siano ora D' un aperto limitato in $\mathbb{R}^{d-1}$ e

$$\eta : D' \to \mathbb{R}$$

una funzione Lipschitziana. Definiamo i domini

$$\Omega := \Big\{(x,y)\in D'\times\mathbb{R}\ :\ y > \eta(x')\Big\} \qquad \text{e} \qquad \widetilde\Omega := \Big\{(x,z)\in D'\times\mathbb{R}\ :\ z > 0\Big\},$$

e le funzioni

$$\Phi(x,y) := \big(x, y-\eta(x)\big) \qquad \text{e} \qquad \Psi(x,z) := \big(x, z+\eta(x)\big).$$

Allora,

$$\det D\Psi(x,z) = 1,$$

dove

$$D\Phi(x,y) := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -\partial_1\eta(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -\partial_{d-1}\eta(x)\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

In particolare,

$$\widetilde{A}(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\partial_1\eta(x) & \dots & -\partial_{d-1}\eta(x) & 1 \end{pmatrix} A(x, z+\eta(x)) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -\partial_1\eta(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\partial_{d-1}\eta(x) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mentre

$$G(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\partial_1\eta(x) & \dots & -\partial_{d-1}\eta(x) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(x, z+\eta(x)) \\ F_2(x, z+\eta(x)) \\ \vdots \\ F_d(x, z+\eta(x)) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad g(x,z) = f(x, z+\eta(x)).$$

In particiolare, se u è una funzione armonica in Ω, allora v è una soluzione di

$$-\mathrm{div}(\widetilde{A}\nabla v) = 0 \qquad \text{in} \qquad \widetilde{\Omega},$$

dove

$$\widetilde{A}(x,z) := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -\partial_1\eta(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\partial_{d-1}\eta(x) \\ -\partial_1\eta(x) & \dots & -\partial_{d-1}\eta(x) & 1 + |\nabla_x\eta|^2(x) \end{pmatrix}$$

Estensioni dispari

Siano ora D' un aperto limitato in $\mathbb{R}^{d-1}$ e

$$\Omega := \Big\{(x,y) \in D' \times \mathbb{R} \ : \ y > 0\Big\} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{\Omega} := \Big\{(x,z) \in D' \times \mathbb{R} \ : \ z < 0\Big\},$$

e le funzioni

$$\Phi(x,y) := \big(x, -y\big) \qquad \text{e} \qquad \Psi(x,z) := \big(x, -z\big).$$

Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = \mathrm{div}\, F + f \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Allora, la funzione

$$v(x,z) := -u(x,-z),$$

è una soluzione di

$$-\mathrm{div}(\widetilde{A}\nabla v) = \mathrm{div}\, G + g \quad \text{in} \quad \widetilde{\Omega},$$

dove

$$\widetilde{A}(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} A(x,-z) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mentre

$$G(x,z) = \begin{pmatrix} -F_1(x,-z) \\ \vdots \\ -F_{d-1}(x,-z) \\ F_d(x,-z) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad g(x,z) = -f(x,-z).$$

Osserviamo inoltre che se $u(x,0) \equiv 0$, allora la funzione

$$w(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & \text{se} \quad y \geq 0, \\ -u(x,-y) & \text{se} \quad y \leq 0, \end{cases}$$

è soluzione debole di

$$-\mathrm{div}(A''\nabla w) = \mathrm{div}\, H + h \quad \text{in} \quad D' \times \mathbb{R},$$

dove

$$A''(x,y) = \begin{cases} A(x,y) & \text{se} \quad y > 0, \\ \widetilde{A}(x,y) & \text{se} \quad y < 0, \end{cases}$$

$$H(x,y) = \begin{cases} F(x,y) & \text{se} \quad y > 0, \\ G(x,y) & \text{se} \quad y < 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad h(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se} \quad y > 0, \\ g(x,y) & \text{se} \quad y < 0, \end{cases}$$

In particolare, la matrice A'' potrebbe avere coefficienti che sono discontinui attraverso il piano $\{y = 0\}$.