Teorema della regolarità ellittica.
Parte II. Regolarità al bordo - un caso particolare

Siano B_R la palla di raggio R e centro 0 in $\mathbb{R}^d$. Useremo la notazione

$$B_R^+ := \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \ : \ x \in B_R,\ x_d > 0\},$$

$$B_R' := \{(x', 0) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \ : \ |x'| < R\}.$$

Dimostreremo il teorema seguente:

Teorema 1. *Siano $f \in L^2(B_R^+)$ ed $u \in H^1(B_R^+)$. Se u è una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad B_R^+,$$

e se $u = 0$ on B_R', allora $u \in H^1(B_r^+)$ per ogni $r < R$.

Lemma 2. *Sia $u \in H^1(B_R^+)$. Se $u = 0$ on B_R', allora la funzione*

$$\widetilde{u}(x', x_d) := \begin{cases} u(x', x_d) & se \quad x_d > 0, \\ -u(x', -x_d) & se \quad x_d < 0. \end{cases}$$

è in $H^1(B_R)$ e le sue derivate deboli sono:

$$\partial_j \widetilde{u}(x', x_d) := \begin{cases} \partial_j u(x', x_d) & se \quad x_d > 0, \\ -\partial_j u(x', -x_d) & se \quad x_d < 0, \end{cases}$$

per ogni $j = 1, \dots, d-1$ e

$$\partial_d \widetilde{u}(x', x_d) := \begin{cases} \partial_d u(x', x_d) & se \quad x_d > 0, \\ \partial_d u(x', -x_d) & se \quad x_d < 0. \end{cases}$$

Proof. Sia $\varphi \in C_c^\infty(B_R)$. Osserviamo che possiamo scrivere $\varphi = \varphi_{even} + \varphi_{odd}$ come

$$\varphi_{even}(x', x_d) = \frac{\varphi(x', x_d) + \varphi(x', -x_d)}{2} \qquad \text{e} \qquad \varphi_{odd}(x', x_d) = \frac{\varphi(x', x_d) - \varphi(x', -x_d)}{2}.$$

Osserviamo che:

- per le derivate parziali di φ_{even} abbiamo:

$$\partial_j \varphi_{even}(x', x_d) = \partial_j \varphi_{even}(x', -x_d) \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, d-1;$$

$$\partial_d \varphi_{even}(x', x_d) = -\partial_d \varphi_{even}(x', -x_d);$$

- le derivate parziali di φ_{odd} soddisfano

$$\partial_j \varphi_{odd}(x', x_d) = -\partial_j \varphi_{odd}(x', -x_d) \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, d-1;$$

$$\partial_d \varphi_{odd}(x', x_d) = \partial_d \varphi_{odd}(x', -x_d).$$

Riassumendo, per $j = 1, \dots, d-1$,

- $\widetilde{u}$, $\partial_j \widetilde{u}$, φ_{odd}, $\partial_d \varphi_{even}$, $\partial_j \varphi_{odd}$ sono funzioni dispari (rispetto alla variabile x_d);
- $\partial_d \widetilde{u}$, φ_{even}, $\partial_d \varphi_{odd}$, $\partial_j \varphi_{even}$ sono funzioni pari (rispetto alla variabile x_d).

Di conseguenza valgono:

$$\int_{B_R} \widetilde{u}(x', x_d) \partial_j \varphi_{even}(x', x_d) = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{B_R} \partial_j \widetilde{u}(x', x_d) \varphi_{even}(x', x_d) = 0,$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{B_R} \widetilde{u}(x', x_d) \partial_d \varphi_{even}(x', x_d) = 2 \int_{B_R^+} u(x', x_d) \partial_d \varphi_{even}(x', x_d), \\ \displaystyle\int_{B_R} \partial_d \widetilde{u}(x', x_d) \varphi_{even}(x', x_d) = 2 \int_{B_R^+} \partial_d u(x', x_d) \varphi_{even}(x', x_d). \end{cases}$$

Mentre, per φ_{odd} abbiamo

$$\int_{B_R} \widetilde{u}(x', x_d) \partial_d \varphi_{odd}(x', x_d) = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{B_R} \partial_d \widetilde{u}(x', x_d) \varphi_{odd}(x', x_d) = 0,$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{B_R} \widetilde{u}(x',x_d)\partial_j\varphi_{odd}(x',x_d) = 2\int_{B_R^+} u(x',x_d)\partial_j\varphi_{odd}(x',x_d), \\ \displaystyle\int_{B_R} \partial_j\widetilde{u}(x',x_d)\varphi_{odd}(x',x_d) = 2\int_{B_R^+} \partial_j u(x',x_d)\varphi_{odd}(x',x_d). \end{cases}$$

Quindi, è sufficiente mostrare che

$$\int_{B_R^+} u(x',x_d)\partial_j\varphi_{odd}(x',x_d) + \int_{B_R^+} \partial_j u(x',x_d)\varphi_{odd}(x',x_d) = 0,$$

$$\int_{B_R^+} u(x',x_d)\partial_d\varphi_{even}(x',x_d) + \int_{B_R^+} \partial_d u(x',x_d)\varphi_{even}(x',x_d) = 0.$$

Ora, siccome $u = 0$ in B_R' esiste una successione di funzioni $\psi_n \in C^1(B_R)$ tale che

$$\psi_n \to 0 \quad \text{in} \quad L^2(B_R')$$

e tale che $\psi_n \to u$ fortemente in $H^1(B_R)$ per $n \to +\infty$. Ora, siccome

$$\int_{B_R^+} \psi_n(x',x_d)\partial_j\varphi_{odd}(x',x_d) + \int_{B_R^+} \partial_j\psi_n(x',x_d)\varphi_{odd}(x',x_d) = \int_{B_R^+} \partial_j\Big(\psi_n(x',x_d)\varphi_{odd}(x',x_d)\Big) = 0,$$

e

$$\begin{aligned} \int_{B_R^+} \psi_n(x',x_d)\partial_d\varphi_{even}(x',x_d) + \int_{B_R^+} \partial_d\psi_n(x',x_d)\varphi_{even}(x',x_d) &= \int_{B_R^+} \partial_d\Big(\psi_n(x',x_d)\varphi_{even}(x',x_d)\Big) \\ &= -\int_{B_R'} \psi_n(x',0)\varphi_{even}(x',0)\,dx', \end{aligned}$$

passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo la tesi. □

Lemma 3. *Siano $f \in L^2(B_R^+)$ ed $u \in H^1(B_R^+)$. Se u è una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad B_R^+,$$

e se $u = 0$ on B_R', allora la funzione

$$\widetilde{u}(x',x_d) := \begin{cases} u(x',x_d) & se \quad x_d > 0, \\ -u(x',-x_d) & se \quad x_d < 0. \end{cases}$$

è una soluzione debole di

$$-\Delta\widetilde{u} = \widetilde{f} \quad in \quad B_R,$$

dove

$$\widetilde{f}(x',x_d) := \begin{cases} f(x',x_d) & se \quad x_d > 0, \\ -f(x',-x_d) & se \quad x_d < 0. \end{cases}$$

Proof. Data una funzione test $\varphi \in C_c^\infty(B_R)$, scriviamo $\varphi = \varphi_{even} + \varphi_{odd}$ come nel lemma precedente. Usando la notazione $j = 1, \dots, d-1$, abbiamo che:

- $\widetilde{f}$, $\partial_j\widetilde{u}$, φ_{odd}, $\partial_d\varphi_{even}$, $\partial_j\varphi_{odd}$ sono funzioni dispari (rispetto alla variabile x_d);
- $\partial_d\widetilde{u}$, φ_{even}, $\partial_d\varphi_{odd}$, $\partial_j\varphi_{even}$ sono funzioni pari (rispetto alla variabile x_d).

Di conseguenza

$$\int_{B_R} \nabla\widetilde{u}\cdot\nabla\varphi_{even} = 0 \quad \text{e} \quad \int_{B_R} \widetilde{f}\varphi_{even} = 0,$$

mentre

$$\int_{B_R} \nabla\widetilde{u}\cdot\nabla\varphi_{odd} = 2\int_{B_R^+} \nabla u\cdot\nabla\varphi_{odd} \qquad \text{e} \qquad \int_{B_R} \widetilde{f}\varphi_{odd} = 2\int_{B_R} f\varphi_{odd}.$$

Ora, osserviamo che per costruzione $\varphi_{odd} \in H_0^1(B_R^+)$ e quindi

$$\int_{B_R^+} \nabla u\cdot\nabla\varphi_{odd} = \int_{B_R} f\varphi_{odd}.$$

Di conseguenza, otteniamo:

$$\int_{B_R} \nabla\widetilde{u}\cdot\nabla\varphi = \int_{B_R} \nabla\widetilde{u}\cdot\nabla\varphi_{odd} = \int_{B_R} \widetilde{f}\varphi_{odd} = \int_{B_R} \widetilde{f}\varphi.$$ □