Due lemmi sulle funzioni di Sobolev

Funzioni di Sobolev con gradiente debole continuo

Lemma 1. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_0(B_R)$. Se le derivate deboli $\partial_1 u, \dots, \partial_d u$ sono funzioni continue, allora u è una funzione differenziabile di classe C^1 e le sue derivate parziali sono proprio $\partial_1 u, \dots, \partial_d u$.*

Proof. Consideramo una funzione $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ con le proprietà seguenti:

$$\phi \geq 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d\,, \qquad \phi \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_1\,, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\,dx = 1,$$

e tale che

$$\phi(x) = \phi(-x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione

$$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\phi(x/\varepsilon),$$

ed osserviamo che $\phi_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon(-x)$ e che

$$\phi_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)\,, \qquad \phi_\varepsilon \geq 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d\,, \qquad \phi_\varepsilon \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon\,, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\varepsilon(x)\,dx = 1\,.$$

Consideriamo la convoluzione

$$u * \phi_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\ , \qquad u * \phi_\varepsilon(x) := \int_\Omega \phi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy.$$

Per $\varepsilon > 0$ fissato si ha che:

- la funzione $u * \phi_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è continua (per il teorema della convergenza dominata);
- la funzione $u * \phi_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è differenziabile e $\partial_j\big(u * \phi_\varepsilon\big) = u * \partial_j \phi_\varepsilon = (\partial_j u) * \phi_\varepsilon$.

Per $\varepsilon \to 0$ si ha che:

- siccome $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$,

$$u * \phi_\varepsilon \text{ converge a } u \text{ fortemente in } H^1(\mathbb{R}^d), \text{ per } \varepsilon \to 0.$$

- siccome $\partial_j u \in C_c(B_{2R})$,

$$(\partial_j u) * \phi_\varepsilon \text{ converge a } \partial_j u \text{ uniformemente su } B_{2R}.$$

Come conseguenza del secondo punto, abbiamo che la famiglia $(u * \phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ è equicontinua ed equilimitata su B_{2R}. In conclusione, siccome lo spazio C^1, è uno spazio di Banach, abbiamo che $u \in C^1$ e che il suo gradiente è proprio il gradiente debole ∇u. □

Proposizione 2. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^m(B_R)$ per un qualche $m \in \mathbb{N}$. Se le derivate deboli*

$$\partial_{j_1\dots j_m} u : B_R \to \mathbb{R}$$

sono funzioni continue su B_R per ogni $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, d\}$ allora u è una funzione di classe C^m su B_R.

Le funzioni in H^k per ogni $k \geq 1$ sono C^∞

Proposizione 3. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^m(B_R)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Allora u è di classe C^∞ su B_R.*

Proof. Ricordiamo i seguenti risultati validi per ogni funzione di Sobolev $u \in H^1(B_R)$:

(1) se $u \in W^{1,p}(B_R)$ for some $p < d$, then $u \in L^q(B_R)$ for $\dfrac{pd}{d-p}$;

(2) se $u \in W^{1,p}(B_R)$ for some $p > d$, then $u \in C(B_R)$.

Siccome per ogni p vale che
$$\frac{pd}{d-p} = p + \frac{p^2}{d-p} \geq p + \frac{4}{d-2},$$
otteniamo che se
$$\varphi \in H^m(\mathbb{R}^d)$$
con m tale che
$$2 + \frac{4m}{d-2} > d,$$
allora $\varphi \in C(B_R)$. Prendendo al posto di φ le derivate parziali deboli di u e usando Lemma 1, otteniamo la tesi. $\square$