Una stima L^∞ per le autofunzioni del Laplaciano con condizioni di Dirichlet

Teorema 1. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\Delta u = \lambda u \quad in \quad \Omega \ , \qquad u \in H_0^1(\Omega) \ , \qquad \int_\Omega u^2 \, dx = 1.$$

Allora, $u \in L^\infty$ e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_d \lambda^{d/4},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Limitatezza delle autofunzioni. Siano $p > d/2$ e Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$. Sia

$$R_\Omega : L^2(\Omega) \to \Omega$$

l'operatore risolvente del laplaciano. Allora,

$$\|R_\Omega(f)\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad \text{per ogni} \quad f \in L^p(\Omega).$$

e quindi R_Ω può essere esteso ad un operatore lineare continuo

$$R_\Omega : L^p(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$$

con norma che dipende solo dalla dimensione d e la misura $|\Omega|$.

- Se $d \leq 3$, allora prendendo $p = 2$, abbiamo che $d/2 < p = 2$ e quindi
$$R_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$$
è un operatore limitato per $d = 1, 2, 3$. Siccome u è soluzione di
$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in} \quad \Omega$$
e $u \in L^2$, abbiamo che $u \in L^\infty$.
- Supponiamo ora che $d \geq 4$. Per la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev abbiamo che
$$R_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$$
è un operatore limitato dove $2^* = \dfrac{2d}{d-2}$.
- Se la dimensione d è 4 oppure 5, allora per
$$2^* = \frac{2d}{d-2} \geq \frac{d}{2}$$
e quindi la composizione
$$R_\Omega^2 := R_\Omega \circ R_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$$
può essere estesa ad un operatore continuo e limitato
$$R_\Omega^2 : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Lemma 2. *Sia $R_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'operatore risolvente associato al Laplaciano con condizioni di Dirichlet su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ di misura finita. Allora esiste una costante N che dipende solo dalla dimensione d tale che la composizione*

$$R_\Omega^N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

può essere estesa ad un operatore limitato

$$R_\Omega^N : L^2(\Omega) \to L^\infty(\Omega).$$

Proof. Possiamo supporre che $d \geq 6$. Sappiamo che R_Ω è un operatore continuo:

$$R_\Omega : L^2 \to L^{2^*} \qquad \text{e} \qquad R_\Omega : L^d \to L^\infty.$$

Teorema si Riesz-Thorin. Sia T un operatore continuo
$$T : L^{p_0} \to L^{q_0} \qquad \text{e} \qquad T : L^{p_1} \to L^{q_1}.$$
Allora, per ogni $\theta \in (0,1)$, l'operatore
$$T : L^{p_\theta} \to L^{q_\theta}$$
è continuo, dove p_θ e q_θ sono tali che
$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \ .$$

Di conseguenza, per ogni $p \in \left[2, {}^{d}/_{2}\right]$, l'operatore
$$R_\Omega : L^p \to L^q \qquad \text{dove} \qquad q := p\left(1 + \frac{p}{d-p}\right),$$
è limitato. Siccome Ω ha misura finita e
$$\frac{p}{d-p} \geq \frac{4}{d}\ ,$$
anche l'operatore
$$R_\Omega : L^p \to L^{p+8/d}.$$
è limitato. Di conseguenza, esiste n tale che
$$R_\Omega^n : L^{2^*} \to L^p$$
è limitato dove
$$p := \frac{2d}{d-2} + \frac{8n}{d} > \frac{d}{2}.$$
In conclusione,
$$R_\Omega : L^2 \to L^{2^*}\ , \qquad R_\Omega^n : L^{2^*} \to L^p\ , \qquad R_\Omega : L^p \to L^\infty$$
sono operatori limitati e quindi anche la composizione
$$R_\Omega^{n+2} : L^2 \to L^\infty$$
è un operatore limitato. □

Dimostrazione di Teorema 1. Sappiamo che la soluzione u del problema
$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in} \quad \Omega\ , \qquad u \in H_0^1(\Omega)\ , \qquad \int_\Omega u^2\,dx = 1$$
è in $L^\infty(\Omega)$. Allora, abbiamo che
$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_d \|\lambda u\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{d+2}} \leq C_d\,\lambda^{\frac{d}{d+4}}\,\|u\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}}$$
e quindi
$$\|u\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}} \leq C_d\,\lambda^{\frac{d}{d+4}}.$$
□

Bibliografia

Una dimostrazione alternativa di Teorema 1 si trova in [D], Example 2.1.9.

[D] E. Davies. *Heat kernels and spectral theory.* Cambridge University Press (1989).