Equazioni Ellittiche - Domande per l'esame

Per tutte le domande, potete usare liberamente le varie proprietà delle funzioni di Sobolev. Per esempio che se u è Sobolev, allora anche u_+, u_-, $|u|$, $(u-t)_+$, $u \wedge t$ sono Sobolev; anche i vari teoremi di approssimazione, per esempio che una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ può essere approssimata con funzioni C^∞ della forma $\phi_\varepsilon * u$.

Contents

---

1. Limitatezza delle soluzioni

Teorema. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^p(\Omega)$, dove $p > \frac{d}{2}$.*
Allora la soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ di

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,p}\|f\|_{L^p}|\Omega|^{\frac{2p-d}{pd}}.$$

Corollario. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H^1_0(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\Delta u = \lambda u \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega)\ , \qquad \int_\Omega u^2\,dx = 1.$$

Allora, $u \in L^\infty$ e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_d \lambda^{d/4},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

---

2. Teorema della regolarità ellittica

Teorema (Regolarità ellittica - regolarità interna). *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$. Sia*

$$A : \Omega \to S_d(\mathbb{R})$$

una matrice $d \times d$ simmetrica a coefficienti variabili

$$a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R},$$

tale che

- *le funzioni a_{ij} sono lipschitziane su Ω $\big(\|\nabla a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty\big)$;*
- *la matrice A è limitata e uniformemente ellittica, ovvero esistono costanti $0 < \ell \le L < +\infty$ tali che*

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A(x) \le L\,\mathrm{Id} \qquad \text{per quasi-ogni} \qquad x \in \Omega\,.$$

e $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole di

$$-\mathrm{div}\big(A\nabla u\big) = f \quad \text{in} \quad \Omega\,.$$

Allora, per ogni $D \Subset \Omega$, $u \in H^2(D)$. Inoltre, per ogni $j = 1, \dots, d$,

$$-\mathrm{div}\big(A\nabla(\partial_j u)\big) = \mathrm{div}\big(F_j + (\partial_j A)\nabla u\big) \quad \text{in} \quad \Omega\,,$$

dove i coefficienti della matrice $\partial_j A$ sono le derivate deboli dei coefficienti di A; mentre $F_j(x) = f(x)e_j$ è il campo vettoriale

$$F_j = (0, \dots, f, \dots, 0) : \Omega \to \mathbb{R}^d.$$

---

3. Regolarità Hölder interna per soluzioni del problema di Poisson

Teorema. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^p(\Omega)$ con $p > \frac{d}{2}$ ed $u \in H^1_0(\Omega)$ la soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u \in H^1_0(\Omega)\,.$$

Allora, $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Più precisamente, esiste una costante dimensionale C_d tale che

$$|u(x) - u(y)| \le C_d \left(\operatorname*{osc}_{\Omega} u + \frac{p\,\|f\|_{L^p(B_1)}}{2p - d} \right) |x - y|^\alpha,$$

per ogni $x, y \in \Omega_\delta := \Big\{ x \in \Omega \ : \ dist(x, \partial\Omega) > \delta \Big\}$ tali che $|x - y| \le \big({}^{\delta}/{}_{2}\big)^{\frac{3p-d}{p}}$, dove $\alpha := \frac{2p-d}{3p-d}$.

Osservazione. *Mostrare la formula della media per (sotto- e sopra-) soluzioni di $-\Delta u = f$ in Ω.*

---

4. Regolarità Hölder fino al bordo per soluzioni del problema di Poisson

Teorema. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ che ha la stima di densita esterna, ovvero supponiamo che esistono due costanti $r_0 > 0$ e $c \in (0,1)$ tali che*

(1) *per ogni $x \in \partial\Omega$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha la stima*

$$\big|B_r(x) \cap \Omega\big| \le (1 - c)|B_r|.$$

Siano $f \in L^p(\Omega)$ con $p > \frac{d}{2}$ ed $u \in H^1_0(\Omega)$ la soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u \in H^1_0(\Omega)\,.$$

Allora, $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$.

Osservazione. *Mostrare che se $u \in H^1_0(\Omega)$ è soluzione di $-\Delta u = f$ in Ω, allora la sua parte positiva è sottosoluzione in $\mathbb{R}^d$ nel senso che $\Delta u_+ + f\chi_{\{u>0\}} \ge 0$ in $\mathbb{R}^d$.*

---

5. Una caratterizzazione degli spazi H_0^1

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ che soddisfa la stima di densità esterna, ovvero tale che*

$$\begin{gathered}\text{Esistono due costanti } r_0>0 \text{ e } c\in(0,1) \text{ tali che}\\ \text{per ogni } x\in\partial\Omega \text{ e per ogni } r\in(0,r_0) \text{ si ha la stima}\\ \big|B_r(x)\cap\Omega\big|\le(1-c)|B_r|.\end{gathered}\tag{2}$$

Allora

$$H_0^1(\Omega)=\Big\{u\in H^1(\mathbb{R}^d)\ :\ u=0 \ \text{ Lebesgue quasi-ovunque su } \ \mathbb{R}^d\setminus\Omega\Big\}.\tag{3}$$

---

6. Funzioni subarmoniche - definizioni equivalenti, proprietà ed esempi

Teorema. *Siano Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione Lebesgue misurabile. Allora, sono equivalenti:*

(1) *$\Delta u\ge 0$ in senso delle distribuzioni, ovvero:*

$$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx\ge 0 \quad \text{per ogni} \quad \varphi\in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{tale che} \quad \varphi\ge 0.$$

(2) *for every $x_0\in\Omega$ la funzione*

$$M:\big(0,\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)\big)\to\mathbb{R}\ , \qquad M(r):=\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)}u(x)\,dx$$

è crescente sull'intervallo $\big(0,\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)\big)$.

In particolare, se la funzione $u:\Omega\to\mathbb{R}$ è subarmonica (ovvero, se valgono (1) e (2)), allora u è semicontinua superiormente.

Esempio (Funzioni subarmoniche e funzioni olomorfe)**.**
Se $h:\Omega\to\mathbb{C}$ è funzione olomorfa su un aperto $\Omega\subset\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$, allora la funzione $f:=\ln|h|$ è subarmonica su Ω.

Esempio (Funzione subarmonica con insieme polare)**.**
Esiste una funzione $u\in H_0^1(B_1)$ tale che:

- *u è subarmonica in B_1;*
- *$u(0)=-\infty$.*

---

7. Bounded slope condition e regolarità Lipschitz fino al bordo per le funzioni armoniche

Teorema. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Sia*

$$g:\partial\Omega\to\mathbb{R},$$

una funzione che soddisfa la bounded slope condition con costante $S>0$ e sia $h\in H^1(\Omega)$ la soluzione di

$$\Delta h=0 \quad \text{in} \quad \Omega\ , \qquad h=g \quad \text{su} \quad \partial\Omega.$$

Allora,

$$|\nabla h|\le C_d S \qquad \text{su} \qquad \Omega,$$

dove C_d è una costante dimensionale. In particolare, $h:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ è Lipschitziana.

Osservazione. *Servirà mostrare la stima del gradiente per funzioni armoniche.*

---

8. Esempio di una funzione armonica non lipschitziana con dato al bordo Lipschitz

Teorema. *Sia Ω un rettangolo in $\mathbb{R}^2$. Esiste una funzione lipchitziana*

$$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$$

tale per cui la soluzione h di

$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega \ , \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega,$$

è continua (hölderiana), ma non lipschitziana fino al bordo di Ω.

Osservazione. *Servirà mostrare il principio di massimo di Hopf per funzioni armoniche in domini C^2.*

9. Continuità fino al bordo per funzioni armoniche

Teorema (Continuità fino al bordo per soluzioni del problema di Dirichlet)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ con la proprietà della palla esterna. Data una funzione $g \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ consideriamo la soluzione debole $h \in H^1(\Omega)$ del problema*

$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega \ , \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$

Allora, la funzione

$$\widetilde{h} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \ , \qquad \widetilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & if \quad x \in \Omega, \\ g(x) & if \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

è continua su $\overline{\Omega}$.

10. Esistenza di soluzioni classiche del problema di Dirichlet

Teorema. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ con la proprietà della palla esterna. Sia $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, esiste una funzione continua*

$$u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \ , \quad u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \, ,$$

tale che

$$\Delta u = 0 \quad in \quad \Omega \qquad e \qquad u = g \quad on \quad \partial\Omega \, .$$

11. Teorema di De Giorgi

Teorema. *Sia $u \in H^1(B_{2R})$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad in \quad B_{2R} \ ,$$

dove la matrice (simmetrica, a coefficienti Lebesgue misurabili) A è tale che:

$$c_A \,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_A \,\mathrm{Id} \quad per\ ogni \quad x \in B_{2R} \, .$$

Esiste una costante $\eta \in (0,1)$ tale che, se

$$\operatorname*{osc}_{B_{2R}} u \le 2,$$

allora

$$\operatorname*{osc}_{B_{R/2}} u \le 2 - \eta.$$

In particolare, le soluzioni u di

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad in \quad B_{2R} \ ,$$

sono funzioni Hölder continue in B_{2R}.

12. Teorema di Schauder – continuità Lipschitz delle soluzioni

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad in \quad \Omega,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, $u \in C^{0,1}(\Omega)$.

13. Teorema di Schauder – regolarità $C^{1,\alpha}$ delle soluzioni

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in C^{0,1}(\Omega)$ una funzione lipschitziana ed una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad in \quad \Omega,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Osservazione. *Per dimostrare la differenziabilità in zero, potete usare che $u(0) = 0$, $A(0) = Id$ e che u soddisfa la seguente condizione di quasi-minimalità*

$$\fint_{B_r} |\nabla(u-h)|^2\, dx \le C r^\alpha\,,$$

dove h è l'estensione armonica di u in B_r.