Funzioni differenziabili di due variabili

Esercizio 1. *Sia* γ *la curva*

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t, t^2).$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

Calcolare la derivata della funzione composta $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) $(F \circ \gamma)'(t) = (1, 2t)$
(b) $(F \circ \gamma)'(t) = (2x, 2y)$
(c) $(F \circ \gamma)'(t) = t^2 + t^4$
(d) $(F \circ \gamma)'(t) = 2t + 4t^3$

Esercizio 2. *Siano* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1. *Quali delle affermazioni seguenti sono vere?*

(a) *Se per una curva* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1, $(F \circ \gamma)'(0) = 0$, *allora*
Il gradiente ∇F *nel punto* $\gamma(0)$ *è ortogonale al versore tangente alla curva* γ *nello stesso punto.*
(b) *Se per una curva* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1, $(F \circ \gamma)'(0) = 0$, *allora*
Il gradiente ∇F *nel punto* $\gamma(0)$ *è ortogonale al versore normale alla curva* γ *nello stesso punto.*
(c) *Se per una curva* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1, $(F \circ \gamma)'(0) = 0$, *allora*
$\gamma(0)$ *è un punto critico per* F.
(d) *Sia* (x_0, y_0) *un punto tale che per tutte le curve* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1 *con* $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ *si ha* $(F \circ \gamma)'(0) = 0$. *Allora*
$\gamma(0)$ *è un punto critico per* F.

Esercizio 3. *Siano* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Quali delle affermazioni seguenti sono vere?*

(a) *Se* F *è deribaile in zero, allora* F *è differenziabile in zero.*
(b) *Se* F *è differenziabile in zero, allora* F *è derivabile in zero.*
(c) *Se per ogni* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *la funzione*
$$t \mapsto F(tx, ty)$$
è derivabile in zero, allora F *è derivbaile in zero.*
(d) *Se per ogni* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *la funzione*
$$t \mapsto F(tx, ty)$$
è derivabile in zero, allora F *è differenziabile in zero.*

Esercizio 4. *Siano* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Quali delle affermazioni seguenti sono vere?*

(a) *Se* F *è derivabile in zero, allora* F *è differenziabile in zero.*
(b) *Se* F *è differenziabile in zero, allora* F *è derivabile in zero.*
(c) *Se per ogni* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *la funzione*
$$t \mapsto F(tx, ty)$$
è derivabile in zero, allora F *è derivabile in zero.*
(d) *Se per ogni* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *la funzione*
$$t \mapsto F(tx, ty)$$
è derivabile in zero, allora F *è differenziabile in zero.*

Esercizio 5. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & se \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad se & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) *Il gradiente in zero non è definito.*
(d) *La funzione è differenziabile in zero.*
(e) *Per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *la funzione*

$$t \mapsto F(tx, ty)$$

è derivabile in zero.
(f) *F è continua in zero.*

Esercizio 6. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) *Il gradiente in zero non è definito.*
(d) *La funzione è differenziabile in zero.*
(e) *Per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *la funzione*

$$t \mapsto F(tx, ty)$$

è derivabile in zero.
(f) *F è continua in zero.*

Esercizio 7. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) *Il gradiente in zero non è definito.*
(d) *La funzione è differenziabile in zero.*
(e) *F è continua in zero.*
(f) *F è limitata.*

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *F è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) *Il gradiente in zero non è definito.*
(d) *La funzione è differenziabile in zero.*
(e) *F è continua in zero.*
(f) *F è limitata.*

Esercizio 9. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) Il gradiente in zero non è definito.
(d) La funzione è differenziabile in zero.
(e) F *è continua in zero.*
(f) F *è limitata.*

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) Il gradiente in zero non è definito.
(d) La funzione è differenziabile in zero.
(e) F *è continua in zero.*
(f) F *è limitata.*

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \sin x}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) Il gradiente in zero non è definito.
(d) La funzione è differenziabile in zero.
(e) F *è continua in zero.*
(f) F *è limitata.*

Esercizio 12. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \sqrt{|x|}}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) Il gradiente in zero non è definito.
(d) La funzione è differenziabile in zero.
(e) F *è continua in zero.*
(f) F *è limitata in* B_1.

Esercizio 13. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) Il gradiente in zero non è definito.
(d) La funzione è differenziabile in zero.
(e) F *è continua in zero.*
(f) F *è limitata.*

Esercizio 14. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^7}{x^2+y^{14}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) Il gradiente in zero non è definito.
(d) La funzione è differenziabile in zero.
(e) F *è continua in zero.*
(f) F *è limitata.*

Esercizio 15. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^7}{x^2+y^{12}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) Il gradiente in zero non è definito.
(d) La funzione è differenziabile in zero.
(e) F *è continua in zero.*
(f) F *è limitata.*

Esercizio 16. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) Il gradiente in zero non è definito.
(d) La funzione è differenziabile in zero.
(e) F *è continua in zero.*
(f) F *è limitata.*

Esercizio 17. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
(c) Il gradiente in zero non è definito.
(d) La funzione è differenziabile in zero.
(e) F *è continua in zero.*
(f) F *è limitata.*

Esercizio 18. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - yx^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) F *è derivabile in zero.*
(b) F *è differenziabile in zero.*
(c) F *è di classe* C^1 *in* $\mathbb{R}^2$
(d) F *è di classe* C^2 *in* $\mathbb{R}^2$
(e) $\partial_{xy}F(0,0) = \partial_{yx}F(0,0)$.

Esercizio 19. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 4y$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) $(1,3)$ *è un punto critico di* F.
(b) $(4,-2)$ *è un punto critico di* F.
(c) La matrice Hessiana di F *in* $(0,0)$ *è definita positiva.*
(d) La matrice Hessiana di F *in* $(0,0)$ *è semi-definita positiva.*
(e) La matrice Hessiana di F *in* $(0,0)$ *è definita negativa.*
(f) La matrice Hessiana di F *in* $(0,0)$ *è semi-definita negativa.*
(g) La matrice Hessiana di F *in* $(0,0)$ *non esiste.*
(h) La matrice Hessiana di F *in* $(0,0)$ *non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 20. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy + 20x$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) $(1,-3)$ *è un punto critico di* F.
(b) $(-2,-4)$ *è un punto critico di* F.
(c) $(-2,-1)$ *è un punto critico di* F.
(d) F *non ha punti critici.*

Esercizio 21. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy + 20x$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) La matrice Hessiana di F *in* $(0,0)$ *è definita positiva.*
(b) La matrice Hessiana di F *in* $(0,0)$ *è semi-definita positiva.*
(c) La matrice Hessiana di F *in* $(0,0)$ *è definita negativa.*
(d) La matrice Hessiana di F *in* $(0,0)$ *è semi-definita negativa.*

(e) *La matrice Hessiana di F in $(0,0)$ non esiste.*
(f) *La matrice Hessiana di F in $(0,0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 22. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = x^2 - y^2 + xy + 20x + 5y + 3$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita positiva.*
(b) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita positiva.*
(c) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita negativa.*
(d) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita negativa.*
(e) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non esiste.*
(f) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 23. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = x^2 + 3y^2 + 5xy + 20x + 5y + 3$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita positiva.*
(b) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita positiva.*
(c) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita negativa.*
(d) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita negativa.*
(e) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non esiste.*
(f) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 24. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = x^2 + 3y^2 + 3xy + 20x + 5y + 3$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita positiva.*
(b) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita positiva.*
(c) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita negativa.*
(d) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita negativa.*
(e) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non esiste.*
(f) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 25. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = 2x^2 + y^2 + 3xy + 20x + 5y + 3$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita positiva.*
(b) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita positiva.*
(c) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita negativa.*
(d) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita negativa.*
(e) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non esiste.*
(f) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 26. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = -2x^2 - y^2 + 2xy + 20x + 5y + 3$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita positiva.*
(b) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita positiva.*
(c) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è definita negativa.*
(d) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita negativa.*
(e) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non esiste.*

(f) *La matrice Hessiana di F in $(1,0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 27. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = e^{xy+y^2}$$

Nel quale dei punti la matrice Hessiana di F è definita positiva ?

(a) $(0,0)$
(b) $(1,1)$
(c) $(0,1/2)$
(d) $(0,2)$
(e) *La matrice Hessiana non è definita positiva in nessuno dei punti indicati.*

Esercizio 28. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Scrivere il gradiente e la matrice Hessiana della funzione F^2. Quali delle affermazioni seguenti sono vere?*

(a) *Se $F(0,0) = 0$, allora la matrice Hessiana di F^2 è semi-definita positiva.*
(b) *Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice Hessiana di F^2 è semi-definita positiva.*
(c) *Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$, allora la matrice Hessiana di F^2 è semi-definita positiva.*
(d) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice Hessiana di F^2 è semi-definita positiva.*
(e) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice Hessiana di F^2 è semi-definita positiva.*
(f) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice Hessiana di F^2 è semi-definita positiva.*

Esercizio 29. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Scrivere il gradiente e la matrice Hessiana della funzione e^F. Quali delle affermazioni seguenti sono vere?*

(a) *Se $F(0,0) = 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(b) *Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(c) *Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(d) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(e) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(f) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(g) *Se $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è definita positiva.*
(h) *Se $\nabla F(0,0) = (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è definita positiva.*
(i) *Se $D^2F(0,0) > 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è definita positiva.*

Esercizio 30. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana della funzione composta $\cos(F) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Quali delle affermazioni seguenti sono vere?*

(a) *Se $F(0,0) = 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(b) *Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(c) *Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(d) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(e) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(f) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*
(g) *Se $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è definita positiva.*
(h) *Se $\nabla F(0,0) = (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è definita positiva.*
(i) *Se $D^2F(0,0) > 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è definita positiva.*

Esercizio 31. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana della funzione composta $\sin(F) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Quali delle affermazioni seguenti sono vere?*

(a) *Se $F(0,0) = 0$, allora la matrice Hessiana di e^F è semi-definita positiva.*

(b) *Se* $F(0,0) = 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$*, allora la matrice Hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*
(c) *Se* $F(0,0) = 0$ *e* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$*, allora la matrice Hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*
(d) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$*, allora la matrice Hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*
(e) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$*, allora la matrice Hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*
(f) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$*, allora la matrice Hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*
(g) *Se* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$*, allora la matrice Hessiana di* e^F *è definita positiva.*
(h) *Se* $\nabla F(0,0) = (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$*, allora la matrice Hessiana di* e^F *è definita positiva.*
(i) *Se* $D^2F(0,0) > 0$*, allora la matrice Hessiana di* e^F *è definita positiva.*

Esercizio 32. *Quali fra le funzioni seguenti hanno il seguente sviluppo di Taylor al secondo ordine in zero:*

$$F(x,y) = x + y + xy + o(x^2 + y^2).$$

(a) $F(x,y) = \sin(x \sin y)$
(b) $F(x,y) = \sin(x + \sin y)$
(c) $F(x,y) = e^{x \sin y} - 1$
(d) $F(x,y) = e^{x + \sin y} - 1$
(e) $F(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)}$

Esercizio 33. *Quali fra le funzioni seguenti hanno il seguente sviluppo di Taylor al secondo ordine in zero:*

$$F(x,y) = x + 2y + 4xy + o(x^2 + y^2).$$

(a) $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 4xy$
(b) $F(x,y) = (x + 2y)\cos(2x - y)$
(c) $F(x,y) = (e^{x+2y} - 1)\cos(x - 2y)$
(d) $F(x,y) = \sin(x - 2y)\cos(x + 2y)$
(e) $F(x,y) = \sin(x + 2y)\cos(x - 2y)$

Esercizio 34. *Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine delle funzioni seguenti:*

(1) $\sin(x \sin y)$
(2) $\sin(xy)$
(3) $\cos(xy)$
(4) $\sin(x + y)$
(5) e^{xy}
(6) e^{x+2y}
(7) $e^{\sin x + \sin y}$
(8) $e^{\cos(xy)}$
(9) $\cos(y \sin x)$
(10) $\sqrt{1 + xy}$
(11) $\sqrt{1 + x + y^2}$
(12) $\sqrt{1 + x + xy}$
(13) $\dfrac{1}{1 + xy}$
(14) $\dfrac{1}{1 + x - xy}$
(15) $\dfrac{1}{(1 + x)(1 + 2y)}$
(16) $\dfrac{1}{(1 + x)(1 - y)}$

Esercizio 35. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *e sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$F(x,y) = f(x)f(y)$$

Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana della funzione F*. Quali delle affermazioni seguenti sono corrette ?*

(a) Se $f(0) = 0$, allora $\nabla F(0,0) = 0$.
(b) Se $f'(0) = 0$, allora $\nabla F(0,0) = 0$.
(c) Se $f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$, allora la matrice Hessiana di F è definita positiva.
(d) Se $f(0) = 0$ e $f''(0) > 0$, allora la matrice Hessiana di F è definita positiva.
(e) Se $f(0) > 0$ e $f''(0) > 0$, allora la matrice Hessiana di F è definita positiva.

Esercizio 36. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *e sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$F(x,y) = f(xy)$$

Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana della funzione F.

Esercizio 37. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *e sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$F(x,y) = xf(y)$$

Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana della funzione F.