

Limitatezza delle funzioni di Sobolev su un intervallo

LEMMA DI APPROSSIMAZIONE

Lemma 1. Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $p \in [1, +\infty)$. Se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \text{per ogni} \quad u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I),$$

allora

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \text{per ogni} \quad u \in W^{1,p}(I).$$

Dimostrazione. Prendiamo una qualsiasi funzione $u \in W^{1,p}(I)$. Per il teorema di approssimazione, esiste una successione $u_n \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ tale che $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(I)$. In particolare, u_n è di Cauchy in $W^{1,p}(I)$. Siccome

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(I)} \leq \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(I)},$$

abbiamo che u_n è di Cauchy in $L^\infty(I)$ e quindi u_n converge ad una qualche funzione $\tilde{u}$ in $L^\infty(I)$. Siccome, allo stesso tempo, u_n converge a u in $L^p(I)$, otteniamo che necessariamente $u = \tilde{u}$. Quindi, passando al limite la disuguaglianza

$$\|u_n\|_{L^\infty(I)} \leq \|u_n\|_{W^{1,p}(I)}$$

otteniamo che

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

□

STIMA $L^\infty(I) - W^{1,p}(I)$ PER FUNZIONI DI SOBOLEV

Teorema 2. Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $p \in [1, +\infty]$. Allora, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ ed esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \text{per ogni} \quad u \in W^{1,p}(I).$$

Dimostrazione.

Caso 1. $p = +\infty$. La dimostrazione in questo caso è immediata. Infatti,

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u\|_{W^{1,\infty}(I)} = \|u\|_{L^\infty(I)} + \|u'\|_{L^\infty(I)} \quad \text{per ogni} \quad u \in W^{1,\infty}(I).$$

Caso 2. Supponiamo che $p = 1$ e che I sia illimitato.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto $x_\varepsilon \in I$ tale che

$$|u(x_\varepsilon)| \leq \varepsilon.$$

Quindi, per ogni $x \in I$, abbiamo

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(x) - u(x_\varepsilon)| + |u(x_\varepsilon)| \\ &\leq \left| \int_{x_\varepsilon}^x u'(t) dt \right| + \varepsilon \leq \|u'\|_{L^1(I)} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Siccome ε è arbitrario, otteniamo che in questo caso

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)}.$$

Caso 3. Supponiamo che $p = 1$ e che I sia limitato.

Possiamo trovare un punto x_0 tale che

$$|u(x_0)| \leq \frac{1}{|I|} \int_I |u(x)| dx.$$

Quindi, per ogni $x \in I$, abbiamo

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(x) - u(x_0)| + |u(x_0)| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x u'(t) dt \right| + \frac{1}{|I|} \int_I |u(x)| dx \leq \|u'\|_{L^1(I)} + \frac{1}{|I|} \int_I |u(x)| dx. \end{aligned}$$

Caso 4. Supponiamo che $p \in (1, +\infty)$ e che I sia illimitato.

Sia $u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$. Siccome

$$\int_I |u(x)|^p dx < +\infty,$$

abbiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $x_\varepsilon \in I$ tale che

$$|u(x_\varepsilon)| \leq \varepsilon.$$

Quindi, per ogni $x \in I$,

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\leq |u(x)^p - u(x_\varepsilon)^p| + |u(x_\varepsilon)^p| \\ &\leq \left| \int_{x_\varepsilon}^x u'(t) |u(t)|^{p-1} dt \right| + \varepsilon^p \\ &\leq \int_I |u'(t)| |u(t)|^{p-1} dt + \varepsilon^p \\ &\leq \|u'\|_{L^p(I)} \|u\|_{L^p(I)}^{p-1} + \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Ora, usando la disuguaglianza di Young

$$AB \leq \frac{1}{p} A^p + \frac{1}{q} B^q$$

per

$$A := \|u'\|_{L^p(I)} \quad \text{e} \quad B = \|u\|_{L^p(I)}^{p-1},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\leq \frac{1}{p} \|u'\|_{L^p(I)}^p + \frac{p-1}{p} \|u\|_{L^p(I)}^p + \varepsilon^p \\ &\leq \|u\|_{W^{1,p}(I)}^p + \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, otteniamo

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \text{per ogni} \quad u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I).$$

Caso 5. Supponiamo che $p \in (1, +\infty)$ e che I sia limitato.

Sia $u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$. Siccome

$$\int_I |u(x)|^p dx < +\infty,$$

possiamo trovare $x_0 \in I$ tale che

$$|u(x_0)|^p \leq \frac{1}{|I|} \int_I |u(x)|^p dx.$$

Quindi, per ogni $x \in I$,

$$\begin{aligned}
|u(x)|^p &\leq |u(x)^p - u(x_0)^p| + |u(x_0)^p| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x u'(t) |u(t)|^{p-1} dt \right| + \frac{1}{|I|} \int_I |u(x)|^p dx \\
&\leq \int_I |u'(t)| |u(t)|^{p-1} dt + \frac{1}{|I|} \int_I |u(x)|^p dx \\
&\leq \|u'\|_{L^p(I)} \|u\|_{L^p(I)}^{p-1} + \frac{1}{|I|} \|u\|_{L^p(I)}^p.
\end{aligned}$$

Usando di nuovo la disuguaglianza di Young con

$$A := \|u'\|_{L^p(I)} \quad \text{e} \quad B = \|u\|_{L^p(I)}^{p-1},$$

otteniamo

$$|u(x)|^p \leq \frac{1}{p} \|u'\|_{L^p(I)}^p + \frac{p-1}{p} \|u\|_{L^p(I)}^p + \frac{1}{|I|} \|u\|_{L^p(I)}^p \leq (1 + |I|^{-1}) \|u\|_{W^{1,p}(I)}^p.$$

Quindi,

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq (1 + |I|^{-1}) \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \text{per ogni} \quad u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I).$$

□

LA CONVERGENZA FORTE $W^{1,p}(I)$ IMPLICA LA CONVERGENZA UNIFORME

Teorema 3. *Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $p \in [1, +\infty]$. Se $u_n \in W^{1,p}(I)$ è una successione che converge fortemente in $W^{1,p}$ ad una certa funzione $u \in W^{1,p}(I)$, allora u_n converge a u in $L^\infty(I)$.*

LE SUCCESSIONI LIMITATE IN $W^{1,p}(I)$ SONO COMPATTE IN $C(I)$

Teorema 4. *Sia I un intervallo aperto e **limitato** in $\mathbb{R}$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Ogni successione limitata in $W^{1,p}(I)$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente.*

Dimostrazione. Sia u_n una successione limitata in $W^{1,p}(I)$. Siccome

$$\|u_n\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u_n\|_{W^{1,p}(I)},$$

abbiamo che u_n è equilimitata su I . Inoltre, per ogni $x, y \in I$, con $x < y$, abbiamo

$$\begin{aligned}
|u_n(y) - u_n(x)| &= \left| \int_x^y u'_n(t) dt \right| \leq \int_x^y |u'_n(t)| dt \\
&\leq |y - x|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_x^y |u'_n(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq |y - x|^{\frac{p-1}{p}} \|u'_n\|_{L^p(I)},
\end{aligned}$$

e quindi u_n è equicontinua.

□

Corollario 5. *Sia I un intervallo aperto e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Allora, la palla unitaria in $W^{1,p}(I)$*

$$\left\{ u \in W^{1,p}(I) : \|u\|_{W^{1,p}} \leq 1 \right\},$$

è un sottoinsieme compatto di $L^p(I)$.

Esempio 6. Consideriamo una funzione $\phi \in C_c^\infty((-1, 1))$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1 \quad e \quad \phi \geq 0 \quad su \quad \mathbb{R}.$$

Definiamo le funzioni

$$\phi_n(x) := n\phi(nx) \quad per \quad ogni \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\Phi_n(x) = \int_{-1}^x \phi_n(t) dt.$$

Allora, $\Phi_n \in W^{1,1}(I)$ con $\Phi_n'(x) = \phi_n(x)$. Inoltre,

$$\|\phi_n\|_{L^1(-1,1)} = \int_{-1}^1 \phi_n(x) dx = \int_{-1}^1 n\phi(nx) dx = \int_{-1/n}^{1/n} n\phi(nx) dx = \int_{-1}^1 \phi(y) dy = 1;$$

$$\|\Phi_n\|_{L^1(-1,1)} \leq 2\|\Phi_n\|_{L^\infty(-1,1)} \leq 1,$$

quindi la successione Φ_n è limitata in $W^{1,1}(-1, 1)$. Ora, osserviamo che il supporto di ϕ_n è contenuto in $(-1/n, 1/n)$. Quindi:

$$\Phi_n(x) := \begin{cases} 0 & se \quad x \leq -1/n, \\ 1 & se \quad x \geq 1/n, \end{cases}$$

il che implica

$$\Phi_n(x) \rightarrow \mathbb{1}_{\{0, +\infty\}}(x) \quad per \quad Lebesgue \quad quasi-ogni \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ora, siccome le funzioni Φ_n sono continue su $(-1, 1)$, mentre l'indicatrice $\mathbb{1}_{\{0, +\infty\}}$ non lo è, abbiamo che nessuna sottosuccessione di Φ_n può convergere uniformemente a $\mathbb{1}_{\{0, +\infty\}}$.

LA CONVERGENZA DEBOLE $W^{1,p}(I)$ IMPLICA LA CONVERGENZA UNIFORME

Teorema 7. Sia I un intervallo aperto e **limitato** in $\mathbb{R}$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Se $u_n \in W^{1,p}(I)$ è una successione che converge debolmente in $W^{1,p}$ ad una certa funzione $u \in W^{1,p}(I)$, allora u_n converge a u in $L^\infty(I)$.

Dimostrazione. Sia u_n una successione in $W^{1,p}(I)$ debolmente convergente a $u \in W^{1,p}(I)$. In particolare, la successione $\|u_n\|_{W^{1,p}(I)}$ è limitata. Consideriamo una qualsiasi sottosuccessione u_{n_k} di u_n . Per Teorema 4, abbiamo che u_{n_k} ammette una sottosuccessione $u_{n_{k_j}}$ che converge in $L^\infty(I)$. Sia $v \in L^\infty(I)$ il limite uniforme

$$v := \lim_{j \rightarrow +\infty} u_{n_{k_j}}.$$

In particolare, per ogni $\varphi \in L^q(I)$, abbiamo

$$\int_I \varphi(x) v(x) dx = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_I \varphi(x) u_{n_{k_j}}(x) dx.$$

D'altra parte, siccome il funzionale

$$T : W^{1,p}(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(w) := \int_I \varphi(x) w(x) dx,$$

è un funzionale lineare limitato su $W^{1,p}(I)$, la convergenza debole $u_n \rightharpoonup u$ implica

$$\int_I \varphi(x) u_n(x) dx = T(u_n) \rightarrow T(u) = \int_I \varphi(x) u(x) dx.$$

In conclusione, abbiamo che

$$\int_I \varphi(x) u(x) dx = \int_I \varphi(x) v(x) dx$$

e siccome $\varphi \in L^q(I)$ è arbitraria, otteniamo che $u \equiv v$. □

Esempio 8. Sia I un intervallo aperto e illimitato in $\mathbb{R}$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Esistono successioni limitate in $W^{1,p}(I)$ e che convergono debolmente a zero, ma che non convergono uniformemente a zero.

COMPORTAMENTO ALL'INFINITO

Teorema 9. Sia I un intervallo aperto e illimitato in $\mathbb{R}$ e sia $p \in [1, +\infty)$. Se $u \in W^{1,p}(I)$, allora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$