

Prodotto tra funzioni di Sobolev

PRODOTTO CON UNA FUNZIONE DI SOBOLEV REGOLARE

Proposizione 1. *Siano I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty)$.*

Siano

$$\eta \in C^1(I) \cap W^{1,p}(I) \quad e \quad u \in W^{1,p}(I).$$

Allora,

$$\eta u \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (\eta u)' = \eta' u + u' \eta.$$

Inoltre, esiste una costante C che dipende solo da I da p tale che

$$\|\eta u\|_{L^p(I)} \leq C \|\eta\|_{W^{1,p}(I)} \|u\|_{L^p(I)} \quad e \quad \|(\eta u)'\|_{L^p(I)} \leq C \|\eta\|_{W^{1,p}(I)} \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che siccome $\eta \in W^{1,p}(I)$, abbiamo che $\eta \in L^\infty(I)$ e vale la stima

$$\|\eta\|_{L^\infty(I)} \leq C \|\eta\|_{W^{1,p}(I)},$$

per una qualche costante C che dipende solo da I e da p . Analogamente, $u \in L^\infty(I)$ e

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Quindi, abbiamo le stime

$$\|\eta u\|_{L^p(I)} \leq \|\eta\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^p(I)} \quad e \quad \|\eta u\|_{L^p(I)} \leq \|u\|_{L^\infty(I)} \|\eta\|_{L^p(I)}.$$

Inoltre, $\eta' u + u' \eta \in L^p(I)$ e si ha la stima

$$\begin{aligned} \|\eta' u + u' \eta\|_{L^p(I)} &\leq \|\eta' u\|_{L^p(I)} + \|u' \eta\|_{L^p(I)} \\ &\leq \|\eta'\|_{L^p(I)} \|u\|_{L^\infty(I)} + \|\eta\|_{L^\infty(I)} \|u'\|_{L^p(I)} \\ &\leq C \|\eta'\|_{L^p(I)} \|u\|_{W^{1,p}(I)} + C \|\eta\|_{W^{1,p}(I)} \|u'\|_{L^p(I)} \\ &\leq 2C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \|\eta\|_{W^{1,p}(I)}. \end{aligned}$$

Per concludere, basta dimostrare che $\eta' u + u' \eta$ sia la derivata debole di ηu .

Data una qualsiasi funzione $\varphi \in C_c^1(I)$, osserviamo che $\varphi \eta \in C_c^1(I)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_I \eta u \varphi' dx &= \int_I u \left((\eta \varphi)' - \eta' \varphi \right) dx = \int_I u (\eta \varphi)' dx - \int_I \eta' \varphi dx \\ &= - \int_I u' \eta \varphi dx - \int_I \eta' \varphi dx \\ &= - \int_I \varphi(x) (u' \eta + \eta' u) dx. \end{aligned}$$

□

PRODOTTO TRA DUE FUNZIONI $W^{1,p}(I)$

Teorema 2. *Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $p \in [1, +\infty)$. Se $u \in W^{1,p}(I)$ e $v \in W^{1,p}(I)$, allora*

$$uv \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

Dimostrazione. Sia u_n una successione in $C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ che converge a u fortemente in $W^{1,p}(I)$. Per ogni $n \geq 1$, abbiamo che

$$u_n v \in W^{1,p}(I) \quad \text{e} \quad (u_n v)' = u_n' v + u_n v'.$$

Siccome

$$\|u_n v - uv\|_{L^p(I)} \leq \|v\|_{L^\infty(I)} \|u_n - u\|_{L^p(I)}$$

abbiamo che $u_n v \rightarrow uv$ fortemente in L^p . Quindi, basta dimostrare che $u_n v$ sia di Cauchy in $W^{1,p}$.

$$\begin{aligned} \|(u_n v)' - (u_m v)'\|_{L^p(I)} &= \|(u_n' v + u_n v') - (u_m' v + u_m v')\|_{L^p(I)} \\ &\leq \|(u_n' - u_m')v\|_{L^p(I)} + \|(u_n - u_m)v'\|_{L^p(I)} \\ &\leq \|v\|_{L^\infty} \|u_n' - u_m'\|_{L^p(I)} + \|u_n - u_m\|_{L^\infty(I)} \|v'\|_{L^p(I)} \\ &\leq \|v\|_{L^\infty} \|u_n' - u_m'\|_{L^p(I)} + C \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(I)} \|v'\|_{L^p(I)}, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □