Operatori compatti autoaggiunti in spazi di Hilbert

Lo spazio di Hilbert

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R},$$

con le seguenti proprietà:

- simmetria:
$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \qquad \text{per ogni} \qquad u, v \in \mathcal{H};$$
- bilinearità:
$$\langle \alpha u + \beta v, W \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle \quad \text{per ogni} \quad u, v, w \in \mathcal{H} \quad \text{ed ogni} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$
- positività:
$$\langle u, u \rangle \geq 0, \quad \text{per ogni} \quad u \in \mathcal{H}, \qquad \text{e} \qquad \langle u, u \rangle = 0 \quad \text{se e solo se} \quad u = 0.$$

Sia $\| \cdot \|$ la norma associata al prodotto scalare, ovvero:

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2} \qquad \text{per ogni} \qquad \in \mathcal{H}.$$

Ricordiamo che:

- per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{H}$
$$\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|;$$
- per ogni $u, v \in \mathcal{H}$,
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|;$$
- per ogni $u \neq 0$, $\|u\| > 0$;
- lo spazio $\mathcal{H}$ dotato della norma $\| \cdot \|$ è completo, ovvero se u_n è una successione di Cauchy in $\mathcal{H}$, allora esiste $u \in \mathcal{H}$ tale che
$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Supporremo, inoltre, che $\mathcal{H}$ sia separabile, ovvero che esiste un insieme denso e numerabile di $\mathcal{H}$.

Convergenza debole e convergenza forte

Diremo che una successione u_n in $\mathcal{H}$ converge fortemente ad $u \in \mathcal{H}$, se

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Diremo che una successione $u_n \in \mathcal{H}$ converge debolmente ad $u \in \mathcal{H}$, se

$$\langle u, v \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle u_n, v \rangle \qquad \text{per ogni} \qquad v \in \mathcal{H}.$$

Scriveremo $u_n \to u$ per indicare che u_n converge fortemente ad u e $u_n \rightharpoonup u$ per indicare che u_n converge debolmente a u.

Ricordiamo che vale il seguente teorema.

Teorema 1. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e sia u_n una successione in $\mathcal{H}$.*

(i) *Se la successione $\|u_n\|$ è limitata, allora u_n ammette una sottosuccessione debolmente convergente in $\mathcal{H}$.*

(ii) *Se u_n converge debolmente ad un certo $u \in \mathcal{H}$, allora u_n è limitata e*

$$\|u\| \le \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\| .$$

Teorema 2. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Sia $u_n \in \mathcal{H}$ una successione che converge debolmente ad $u \in \mathcal{H}$. Allora, sono equivalenti:*

(1) *u_n converge ad u fortemente.*

(2) $\|u\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|$.

Lo spazio $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ degli operatori lineari limitati su $\mathcal{H}$

Diciamo che una mappa $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è un operatore lineare limitato, se:

- T è lineare:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \quad \text{per ogni} \quad u, v \in \mathcal{H} \quad \text{ed ogni} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,;$$

- T è limitato, ovvero

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} := \sup\Big\{\|T(u)\| \;:\; u \in \mathcal{H}\,,\ \|u\| = 1\Big\} < +\infty\,.$$

Esercizio 3. *Mostrare che la somma di due operatori lineari limitati*

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad e \qquad S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\,,$$

è un operatore lineare limitato e

$$\|T + S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} + \|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\,.$$

Esercizio 4. *Dimostrare che lo spazio $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ degli operatori lineari limitati su $\mathcal{H}$, dotato della norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, è completo.*

Esercizio 5. *Dati due operatori lmineari limitati*

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad e \qquad S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\,,$$

la loro composizione

$$T \circ S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\ , \qquad (T \circ S)(u) = T(S(u))\,,$$

è un operatore lineare limitato e

$$\|T \circ S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\,.$$

Ricordiamo che vale il teorema seguente

Teorema 6. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore lineare.*
Allora, sono equivalenti:

(1) *T è limitato;*

(2) *T è continuo, ovvero se $u_n \to u$ in $\mathcal{H}$, allora $T(u_n) \to T(u)$ in $\mathcal{H}$.*

Inoltre, vale il teorema seguente:

Teorema 7. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e sia $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore lineare. Allora, sono equivalenti:*

(1) *T è limitato;*

(2) *per ogni successione debolmente convergente $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathcal{H}$, si ha che $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ in $\mathcal{H}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che (1) implica (2). Dato un elemento $v \in \mathcal{H}$, consideriamo la mappa:

$$\ell_v : \mathcal{H} \to \mathbb{R} , \qquad \ell_v(u) := \langle T(u), v\rangle .$$

Osserviamo che $\ell_v : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ è un operatore continuo e limitato. Infatti,

$$|\ell_v(u)| = |\langle T(u), v\rangle| \le \|T(u)\| \, \|v\| \le \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|u\| \, \|v\| .$$

Quindi, per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste $w \in \mathcal{H}$ tale per cui:

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, w\rangle \qquad \text{per ogni} \qquad u \in \mathcal{H} .$$

Ora, usando la convergenza debole $u_n \rightharpoonup u$, abbiamo che:

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, w\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle u_n, w\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T(u_n), v\rangle.$$

Siccome v è arbitrario, otteniamo che $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$.

Dimostriamo ora che (2) implica (1). Sia u_n una successione di vettori di norma 1 che realizza l'estremo superiore

$$s := \sup \Big\{ \|T(u)\| \ : \ u \in \mathcal{H} , \ \|u\| = 1 \Big\} ,$$

ovvero la successione $\|T(u_n)\|$ è crescente e

$$\lim_{n\to+\infty} |T(u_n)| = s.$$

Siccome u_n è limitata, esiste una sottosuccessione u_{n_k} che converge debolmente in $\mathcal{H}$ ad un certo $u \in \mathcal{H}$. Quindi, per (2),

$$T(u_{n_k}) \rightharpoonup T(u).$$

Ma allora, la successione $\|T(u_{n_k})\|$ è limitata e quindi $s < +\infty$. □

Operatori aggiunti e autoaggiunti

Esercizio 8. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostrare che se $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è un operatore lineare continuo, allora esiste un unico operatore lineare $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tale che*

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle \qquad \textit{per ogni} \qquad u, v \in \mathcal{H} .$$

Inoltre, mostrare che:

- *T^* è limitato e $\|T^*\| \le \|T\|$;*
- *$T^{**} = T$;*
- *$\|T^*\| = \|T\|$.*

Definizione 9. *L'operatore T^* è detto* **operatore aggiunto di T.**

Definizione 10. *Un operatore lineare continuo $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è detto* **autoaggiunto**, *se $T = T^*$. Osserviamo che T è autoaggiunto se e solo se*

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle \qquad \textit{per ogni} \qquad u, v \in \mathcal{H}\,.$$

Operatori compatti su $\mathcal{H}$

Teorema 11. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e sia*

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\,,$$

un operatore lineare. Allora, sono equivalenti:

(1) *Se u_n converge debolmente ad un certo $u \in \mathcal{H}$, allora $T(u_n)$ converge fortemente a $T(u)$.*

(2) *Ogni successione limitata $u_n \in \mathcal{H}$ ammette una sottosuccessione u_{n_k} tale che $T(u_{n_k})$ sia fortemente convergente in $\mathcal{H}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione dell'implicazione (1) $\Rightarrow$ (2) è immediata. Infatti, siccome u_n è una successione limitata, essa ammette una sottosuccessione u_{n_k} debolmente convergente ad un certo u. Quindi, per (1), abbiamo che $T(u_{n_k}) \to T(u)$ fortemente in $\mathcal{H}$.

Dimostriamo ora che (2) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo per assurdo che esistono $\delta > 0$ ed una successione $u_n \rightharpoonup 0$ tale che $\|T(u_n)\| \geq \delta$. Siccome u_n converge debolmente, abbiamo che $\|u_n\|$ è limitata. Esistono quindi una sottosuccessione u_{n_k} ed $w \in \mathcal{H}$ tali che

$$T(u_{n_k}) \to w.$$

In particolare,

$$\|w\| \geq \delta.$$

D'altra parte, per la convergenza debole $u_{n_k} \rightharpoonup 0$, abbiamo

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \langle u_{n_k}, T^*(w)\rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle T(u_{n_k}), w\rangle = \langle w, w\rangle = \|w\|^2\,,$$

il che è un assurdo. □

Corollario 12. *Su uno spazio di Hilbert separabile, ogni operatore compatto è limitato.*

Esercizio 13. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Siano*

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

un operatore lineare limitato ed

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

un operatore lineare compatto. Mostrare che $S \circ T$ e $T \circ S$ sono compatti.

Esercizio 14. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Siano*

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad e \qquad S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

due operatore lineari compatti. Mostrare che anche l'operarore $T + S$ è compatto.

Esercizio 15. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Se $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è un operatore lineare compatto, allora anche il suo aggiunto $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è compatto.*

Esercizio 16. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert seprabile e sia $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ una base hilbertiana. Data una successione $\alpha_n \in \mathbb{R}$ con*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0\,,$$

definiamo l'operatore

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\ , \qquad T(u) := \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \langle u, \phi_n\rangle \phi_n\,.$$

Mostrare che T è un operatore compatto.

Soluzione. Basta dimostrare che data una successione $u_k \rightharpoonup 0$, abbiamo che $T(u_k) \to 0$ fortemente in $\mathcal{H}$. Infatti, osserviamo che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u_k\| \leq C \quad \text{per ogni} \quad k \geq 1.$$

Fissiamo ora $\varepsilon > 0$ ed osserviamo che esiste $N \geq 1$ tale che

$$|\alpha_n| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n \geq N\,.$$

Quindi, per ogni k,

$$\left\| \sum_{n=N}^{+\infty} \alpha_n \langle u_k, \phi_n\rangle \phi_n \right\| \leq \varepsilon \|u_k\| \leq \varepsilon C.$$

D'altra parte, siccome $u_k \rightharpoonup 0$, abbiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle u_k, \phi_n\rangle \phi_n = 0\,.$$

Quindi, per k abbastanza grande $\|T(u_k)\| \leq (1 + C)\varepsilon$. □

Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti

Definizione 17. *Siano $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore lineare.*
Diremo che T è semi-definito positivo, se

$$\langle T(u), u\rangle \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad u \in \mathcal{H}\,.$$

Diremo che T è definito positivo, se

$$\langle T(u), u\rangle > 0 \quad \textit{per ogni} \quad u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}\,.$$

Definizione 18. *Siano $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore lineare. Se*

$$\phi \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \qquad e \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

sono tali che

$$T(\phi) = \lambda\phi$$

allora diremo che λ è un autovalore di T e che ϕ è il corrispondente autovettore.

Teorema 19. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Sia*

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

un operatore lineare, compatto, autoaggiunto e semi-definito positivo.
Allora, vale una delle seguenti alternative:

(1) *Esistono un numero finito di autovettori* $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ *corrispondenti agli autovalori*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N > 0\,,$$

tali che

$$T(u) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \langle \phi_j, u\rangle \phi_j \qquad \text{per ogni} \qquad u \in \mathcal{H}\,.$$

(2) *Esiste una successione di autovettori* $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *con corrispondenti autovalori* $\{\lambda_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *con le seguenti proprietà:*

- $\lambda_1 \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$;
- λ_n *è una successione monotona decrescente;*
- $\lambda_n > 0$ *per ogni* $n \geq 1$;
- $\lambda_n \to 0$;
- *per ogni* $u \in \mathcal{H}$, *abbiamo*

$$T(u) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle \phi_j, u\rangle \phi_j\,.$$

Inoltre, se T *è definito positivo, allora* $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *è una base hilbertiana.*

Il lemma principale è il seguente.

Lemma 20. *Siano* $\mathcal{H}$ *uno spazio di Hilbert separabile e* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *un operatore compatto. Sia* V *un sottospazio lineare chiuso di* $\mathcal{H}$ *e invariante rispetto a* T, *ovvero:*

$$T(v) \in V \quad \text{per ogni} \quad v \in V\,.$$

Definiamo

$$\lambda := \sup\Big\{\langle T(u), u\rangle \ :\ u \in V\,,\ \|u\| = 1\Big\}\,,$$

e supponiamo che

$$\lambda > 0.$$

Allora, esiste un vettore $\phi \in V$ *tale che*

$$\|\phi\| = 1 \qquad e \qquad \lambda = \langle T(\phi), \phi\rangle\,.$$

Inoltre, ϕ *è un autovettore di* T *e* λ *è un autovalore relativo a* ϕ, *ovvero*

$$T(\phi) = \lambda\phi\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che l'estremo superiore

$$\lambda := \sup\Big\{\langle T(u), u\rangle \ :\ u \in V\,,\ \|u\| = 1\Big\}\,,$$

sia raggiunto. Infatti, sia $u_n \in V$ una successione di vettori di norma 1 tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T(u_n), u_n\rangle = \lambda.$$

Sia u_{n_k} una sottosuccessione di u_n debolmente convergente ad un certo $u \in \mathcal{H}$. Siccome V è un sottospazio lineare chiuso, abbiamo che $u \in V$. Inoltre, siccome T è compatto, si ha che

$$T(u_{n_k}) \to T(u)\,,$$

fortemente in $\mathcal{H}$. Quindi,

$$\lambda = \lim_{k\to+\infty} \langle T(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle = \langle T(u), u\rangle\,.$$

In particolare, $u \neq 0$. Osserviamo ora che come conseguenza dalla convergenza debole, abbiamo

$$\|u\| \leq \liminf_{k\to+\infty} \|u_{n_k}\| = 1\,.$$

Definiamo

$$v := \frac{u}{\|u\|}\,.$$

Allora, $\|v\| = 1$ e

$$\lambda = \langle T(u), u\rangle = \|u\|^2 \langle T(v), v\rangle \leq \langle T(v), v\rangle.$$

D'altra parte, per la definizione di λ,

$$\langle T(v), v\rangle \leq \lambda\,,$$

e quindi si ottiene:

$$\|u\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \lambda = \langle T(u), u\rangle\,.$$

Definiamo $\phi := u$ ed osserviamo che siccome

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\langle T(\phi + tw), \phi_1 + tw\rangle}{\|\phi + tw\|^2} = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad w \in V\,,$$

abbiamo che

$$\langle T(\phi), w\rangle = \lambda\langle \phi, w\rangle \qquad \text{per ogni} \qquad w \in V\,.$$

Prendendo $w = T(\phi) - \lambda\phi$, otteniamo che

$$\|T(\phi) - \lambda\phi\| = 0\,,$$

e quindi $T(\phi) = \lambda\phi$. □

Lemma 21. *Siano $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore compatto e autoaggiunto. Sia V un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{H}$ e invariante rispetto a T, ovvero:*

$$T(v) \in V \quad \textit{per ogni} \quad v \in V\,.$$

Se

$$\langle T(u), u\rangle = 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad u \in V\,,$$

allora

$$T(u) = 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad u \in V\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo un vettore $u \in V$. Siccome V è invariante per T, abbiamo che per ogni vettore $\psi \perp V$, si ha che

$$\langle T(u), \psi\rangle = 0\,.$$

D'altra parte, se $\psi \in V$, allora

$$\langle T(u + \psi), u + \psi\rangle = \langle T(u), u\rangle + \langle T(\psi), \psi\rangle + 2\langle T(u), \psi\rangle\,,$$

e quindi

$$\langle T(u), \psi\rangle = 0.$$

Quindi $T(u) = 0$. □

Dimostrazione di Teorema 19. Applicando Lemma 20 con $V_1 = \mathcal{H}$, otteniamo un vettore $\phi_1 \in H$ tale che

$$\|\phi_1\| = 1 \qquad \text{e} \qquad T(\phi_1) = \lambda_1\phi_1\,,$$

dove

$$\lambda_1 = \min\Big\{\langle T(u), u\rangle \ : \ u \in \mathcal{H},\ \|u\| = 1\Big\}\,.$$

Se $\lambda_1 = 0$, allora l'operatore T è identicamente nullo (per Lemma 21). Se invece $\lambda_1 > 0$, allora consideriamo lo spazio

$$V_2 := \Big\{u \in \mathcal{H} \ : \ u \perp \phi_1\Big\}.$$

Osserviamo che V_2 è uno spazio invariante per l'operatore T. Infatti, se $u \in V_2$, allora

$$\langle T(u), \phi_1\rangle = \langle u, T(\phi_1)\rangle = \langle u, \lambda_1\phi_1\rangle = 0\,,$$

e quindi $T(u) \in V_2$. Esiste quindi un autovettore ϕ_2 tale che

$$\|\phi_2\| = 1\,, \quad \langle \phi_1, \phi_2\rangle = 0\,, \quad T(\phi_2) = \lambda_2\phi_2\,,$$

dove

$$\lambda_2 = \min\Big\{\langle T(u), u\rangle \ : \ u \in \mathcal{H},\ \|u\| = 1,\ \langle u, \phi_1\rangle = 0\Big\}.$$

Consideriamo di nuovo due casi. Se $\lambda_2 = 0$, allora T è identicamente nullo su V_2. Quindi, in questo caso, T è della forma

$$T(u) = \lambda_1\langle \phi_1, u\rangle\phi_1.$$

Se invece $\lambda_2 > 0$, allora continuiamo la costruzione considerando lo spazio

$$V_3 := \Big\{u \in \mathcal{H} \ : \ u \perp \phi_1,\ u \perp \phi_2\Big\}.$$

In generale, al passo n, abbiamo $n-1$ autofunzioni $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ relative ad $n-1$ autovalori

$$0 < \lambda_{n-1} \le \dots \le \lambda_2 \le \lambda_1\,,$$

tali che

$$\langle \phi_i, \phi_j\rangle = \delta_{ij} \qquad \text{e} \qquad T(\phi_j) = \lambda_j\phi_j\ ,$$

e dove per ogni $1 \le k \le n-1$

$$\lambda_k := \max\Big\{\langle T(u), u\rangle \ : \ u \in \mathcal{H},\ \|u\| = 1,\ \langle \phi_j, u\rangle = 0 \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, k-1\Big\}.$$

Definiamo quindi

$$V_n := \Big\{u \in \mathcal{H} \ : \ u \perp \phi_1,\ u \perp \phi_2, \dots,\ u \perp \phi_{n-1}\Big\},$$

e

$$\lambda_n = \min\Big\{\langle T(u), u\rangle \ : \ u \in V_n,\ \|u\| = 1\Big\}.$$

Consideriamo quindi due casi:
Caso 1. Esiste $N \ge 1$ tale che

$$\lambda_N = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_k > 0 \quad \text{per} \quad k \le N-1.$$

In questo caso,

$$T(u) = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j \langle u, \phi_j\rangle\phi_j\,.$$

Caso 2. Il processo non termina mai, ovvero esiste una successione $\{\phi_n\}_{n\ge1}$ di autofunzioni tali che:

$$\langle \phi_i, \phi_j\rangle = \delta_{ij} \qquad \text{e} \qquad T(\phi_k) = \lambda_k\phi_k\ ,$$

e dove per ogni $k \ge 2$

$$\lambda_k := \max\Big\{\langle T(u), u\rangle \ : \ u \in \mathcal{H},\ \|u\| = 1,\ \langle \phi_j, u\rangle = 0 \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, k-1\Big\} > 0\,.$$

Per costruzione, abbiamo che:

- $\lambda_1 \le \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$;

- λ_n è una successione monotona decrescente;
- siccome T è semi-definito, positivo, $\lambda_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$.

Dimostriamo ora che $\lambda_n \to 0$. Supponiamo per assurdo che $\lambda_n \geq \delta > 0$ per ogni n. Siccome ϕ_n è una successione limitata, esiste una sottosuccessione ϕ_{n_k} che converge debolmente ad un certo $\psi \in \mathcal{H}$. Ora, da un lato ψ è nella chiusura dello spazio generato dalla falmiglia $\{\phi_{n_k}\}_{k\geq 1}$, mentra dall'altro lato,

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \langle \phi_{n_j}, \phi_{n_k} \rangle = \langle \phi_{n_j}, \psi \rangle \qquad \text{per ogni} \qquad j\,,$$

e quindi abbiamo che necessariamente $\psi = 0$. Di conseguenza, siccome T è compatto, abbiamo che $T(\phi_{n_k}) \to 0$ fortemente in $\mathcal{H}$ e quindi

$$\delta \leq \lim_{k\to+\infty} \langle T(\phi_{n_k}), \phi_{n_k} \rangle = 0\,,$$

il che è un assurdo. In conclusione,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0\,.$$

Sia ora W la chiusura dello spazio generato da $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ e sia V_∞ il suo ortogonale. Definiamo

$$\lambda_\infty := \max\Big\{ \langle T(u), u \rangle \ : \ u \in V_\infty,\ \|u\| = 1 \Big\}\,.$$

Siccome

$$\lambda_n \geq \lambda_\infty \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1\,,$$

abbiamo che $\lambda_\infty = 0$. Per Lemma 21, abbiamo quindi che

$$T(v) = 0 \quad \text{per ogni} \qquad v \in V_\infty\,.$$

Si ha quindi che

$$T(u) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle \phi_j, u \rangle \phi_j\,,$$

per ogni $u \in \mathcal{H}$. Infine, osserviamo che se T è definito positivo allora necessariamente $V_\infty = \{0\}$. In questo caso, $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ è una base hilbertiana di $\mathcal{H}$. $\square$