

Teoremi di approssimazione

TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE IN $W^{1,p}(\mathbb{R})$

Teorema 1. Sia $p \in [1, +\infty)$. Allora, per ogni funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, esiste una successione $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione.

Step 1. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, possiamo trovare una funzione $\eta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che:

- $\eta_k \equiv 1$ su $[-k; k]$;
- $\eta_k \equiv 0$ su $\mathbb{R} \setminus (-k-1; k+1)$;
- $|\eta'_k| \leq 2$ su $[-k-1; k+1] \setminus [-k; k]$.

Per costruzione $\eta_k \uparrow 1$ su $\mathbb{R}$. Quindi, per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u - \eta_k u\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \|u' - (u\eta_k)'\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|u' - u'\eta_k - u\eta'_k\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u'(1 - \eta_k)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u\eta'_k\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Quindi, di nuovo per il teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u' - (u\eta_k)'\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0,$$

e di conseguenza, $u\eta_k \rightarrow u$ fortmente in $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Step 2. Sia $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ tale che $v = v' \equiv 0$ su $\mathbb{R} \setminus [-k, k]$ per un qualche $k > 0$. Possiamo quindi approssimare v' in $L^p(\mathbb{R})$ con una successione di funzioni $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ supportate in $(-k-1, k+1)$. Definiamo

$$\Psi_n(x) := \int_{-\infty}^x \psi_n(t) dt.$$

Fissata una funzione $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ supportata in $[k+2, k+3]$ e tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(t) dt = 1,$$

consideriamo la successione di funzioni

$$u_n(x) := \Psi_n(x) - \int_{\mathbb{R}} (\psi_n(t) - v'(t)) dt \int_{-\infty}^x \eta(s) ds.$$

Per costruzione, abbiamo che

$$u_n \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Inoltre, per ogni $n \geq 1$, il supporto di u_n è contenuto nell'intervallo $[-k, k+3]$. Infatti, per ogni $y \geq k+3$, si ha:

$$u_n(y) := \Psi_n(y) - \int_{\mathbb{R}} (\psi_n(t) - v'(t)) dt \int_{-\infty}^y \eta(s) ds = \int_{-\infty}^y \psi_n(t) dt - \int_{\mathbb{R}} (\psi_n(t) - v'(t)) dt = 0.$$

Quindi, basta verificare che

$$u_n \rightarrow v \quad \text{in} \quad W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Siccome, le funzioni u_n , u'_n , v e v' sono supportate in $[-k, k+3]$, è sufficiente mostrare che

$$u'_n \rightarrow v' \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R}).$$

Infine, dalla stima

$$\begin{aligned} \|u'_n - v'\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|\psi_n - v'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \left| \int_{\mathbb{R}} (\psi_n(t) - v'(t)) dt \right| \|\eta'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\psi_n - v'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\psi_n - v'\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\eta'\|_{L^p(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

otteniamo che $\|u'_n - v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ il che conclude la dimostrazione. $\square$

TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE IN $W^{1,p}(I)$

Teorema 2. *Sia $p \in [1, +\infty)$. Allora, per ogni funzione $u \in W^{1,p}(I)$, esiste una successione $u_n \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ tale che $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(I)$.*

Dimostrazione. Segue dal teorema di estensione e dal teorema di approssimazione in $W^{1,p}(\mathbb{R})$. $\square$