

## Distribuzioni e spazi $W^{1,p}$

Sia  $I$  un intervallo aperto in  $\mathbb{R}$ . Sia

$$T : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R},$$

un funzionale lineare. La derivata distribuzionale di  $T$  è il funzionale

$$T' : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R},$$

definito come

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(I).$$

**Esempio 1.** Ad ogni funzione  $u \in L_{loc}^1(I)$  possiamo associare il funzionale

$$T : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(\varphi) = \int_I u(x)\varphi(x) dx.$$

La derivata distribuzionale di  $T$  è il funzionale lineare

$$T' : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad T'(\varphi) = - \int_I u(x)\varphi'(x) dx.$$

**Esempio 2.** Dato un punto  $a \in I$  il funzionale

$$\delta_a : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta_a(\varphi) = \varphi(a),$$

è un funzionale lineare su  $C_c^\infty(I)$ . La derivata distribuzionale di  $\delta_a$  è il funzionale lineare

$$\delta'_a : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta'_a(\varphi) = -\varphi'(a).$$

### LE DISTRIBUZIONI CON DERIVATA NORMALE NULLA SONO COSTANTI

**Proposizione 3.** Sia  $T : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare. Se la derivata distribuzionale di  $T$  è nulla, allora esiste una costante  $C \in \mathbb{R}$  tale che

$$T(\varphi) = C \int_I \varphi(x) dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(I).$$

*Dimostrazione.* Basta dimostrare la proposizione per intervalli limitati  $I = (a, b)$ .

Sia  $\eta \in C_c^\infty(I)$  una funzione tale che  $\int_I \eta(x) dx = 1$ .

Allora, per ogni  $\phi \in C_c^\infty(I)$ , la funzione

$$G(x) = \int_a^x \left( \phi(t) - \left( \int_I \phi \right) \eta(t) \right) dt,$$

è in  $C_c^\infty(I)$ . Quindi,

$$0 = -T'(G) = T(G') = T\left(\phi - \left(\int_I \phi\right)\eta\right) = T(\phi) - \left(\int_I \phi\right)T(\eta),$$

che possiamo scrivere come

$$T(\phi) = T(\eta) \int_I \phi(x) dx.$$

La conclusione segue prendendo  $C = T(\eta)$ . □

**Proposizione 4.** *Siano  $I$  un intervallo aperto,  $p \in (1, +\infty)$  e  $T : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare.*

(i) *Se esiste una costante  $C > 0$  tale che*

$$|T(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{L^q(I)} \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(I),$$

*allora esiste un'unica funzione  $u \in L^p(I)$  tale che*

$$T(\varphi) = \int_I u(x) \varphi(x) dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(I).$$

(ii) *Se esiste una costante  $C > 0$  tale che*

$$|T(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{L^q(I)} \quad \text{e} \quad |T'(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{L^q(I)} \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(I),$$

*allora esiste un'unica funzione  $u \in W^{1,p}(I)$  tale che*

$$T(\varphi) = \int_I u(x) \varphi(x) dx \quad \text{e} \quad T'(\varphi) = \int_I u'(x) \varphi(x) dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(I).$$

*Dimostrazione.*

Dimostriamo (i). Per il teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale lineare

$$S : L^q(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che  $S \equiv T$  su  $C_c^\infty(I)$  e

$$|S(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{L^q(I)} \quad \text{per ogni } \varphi \in L^q(I).$$

Esiste quindi una funzione  $u \in L^p(I)$  tale che

$$S(\varphi) = \int_I u(x) \varphi(x) dx \quad \text{per ogni } \varphi \in L^q(I).$$

In particolare, siccome  $S \equiv T$  su  $C_c^\infty(I)$ ,

$$T(\varphi) = \int_I u(x) \varphi(x) dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^1(I).$$

Dimostriamo (ii). Per il punto (i) sappiamo che esiste una funzione  $u \in L^p(I)$  tale che

$$T(\varphi) = \int_I u(x) \varphi(x) dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^1(I).$$

Consideriamo la derivata distribuzionale di  $T$

$$T' : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad T'(\varphi) = - \int_I u(x) \varphi'(x) dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Siccome

$$|T'(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{L^q(I)} \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(I),$$

per il teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale lineare

$$S : L^q(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che  $S \equiv T'$  su  $C_c^1(I)$  e

$$|S(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{L^q(I)} \quad \text{per ogni } \varphi \in L^q(I).$$

Esiste quindi una funzione  $v \in L^p(I)$  tale che

$$S(\varphi) = \int_I v(x) \varphi(x) dx \quad \text{per ogni } \varphi \in L^q(I).$$

In particolare, siccome  $S \equiv T'$  su  $C_c^\infty(I)$ ,

$$\int_I u(x) \varphi'(x) dx = -T'(\varphi) = -S(\varphi) = - \int_I v(x) \varphi(x) dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Quindi,  $u \in W^{1,p}(I)$  e  $u' = v$ .

□