Teorema della traccia su insiemi regolari

Disuguaglianza della traccia per funzioni regolari

Lemma 1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto, limitato, di classe C^1. Allora, esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni funzione $\varphi \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, si ha*

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi| \, d\mathcal{H}^{d-1} \le C \left(\int_\Omega |\varphi| \, dx + \int_\Omega |\nabla \varphi| \, dx \right).$$

Dimostrazione. Sia ϕ_k, $k = 1, \dots, N$, la partizione dell'unità associata a Ω. Sia $\varphi_k := \varphi\phi_k$. Allora,

$$\int_\Omega |\varphi_k| \, dx \le \|\phi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_\Omega |\varphi| \, dx \,,$$

$$\int_\Omega |\nabla \varphi_k| \, dx \le \|\phi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_\Omega |\nabla \varphi| \, dx + \|\nabla \phi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_\Omega |\varphi| \, dx \,.$$

Di conseguenza, è sufficiente mostrare che per ogni k

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi_k| \, d\mathcal{H}^{d-1} \le C \left(\int_\Omega |\varphi_k| \, dx + \int_\Omega |\nabla \varphi_k| \, dx \right).$$

Per costruzione, sappiamo che:

- φ_k è supportata su un aperto $\mathcal{C}$ che a meno di rotazioni è dato da $\mathcal{C} := B'_r \times (-\delta/2, \delta/2)$;
- esiste una funzione
$$\eta : B'_{2r} \to \mathbb{R}$$
di classe C^1 ed a valori nell'intervallo $(-\delta/2, \delta/2)$, tale che
$$\Omega \cap \Big(B'_{2r} \times (-2\delta, 2\delta) \Big) = \Big\{ (x', x_d) \in B'_{2r} \times (-2\delta, 2\delta) \ : \ x_d > \eta(x') \Big\};$$
- In particolare, abbiamo che
$$\varphi_k\big(x', \eta(x') + \delta\big) = 0 \quad \text{per ogni} \quad x' \in B'_r.$$

Ora, per ogni $x' \in B'_r$, calcoliamo

$$\big|\varphi_k(x', \eta(x'))\big| = \big|\varphi_k(x', \eta(x')) - \varphi_k(x', \eta(x'))\big| \le \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+\delta} |\nabla \varphi_k|(x', t) \, dt.$$

Integrando in x', otteniamo

$$\int_{B'_r} \big|\varphi_k(x', \eta(x'))\big| \, dx' \le \int_{B'_r} dx' \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+\delta} |\nabla \varphi_k|(x', t) \, dt = \int_\Omega |\nabla \varphi_k| \, dx.$$

Ora, siccome la funzione η è Lipschitz (con constante di Lipschitz $L > 0$) su B'_r, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} |\varphi_k| &= \int_{B'_r} \big|\varphi_k(x', \eta(x'))\big| \sqrt{1 + |\nabla_{x'} \eta(x')|^2} \, dx' \\
&\le \sqrt{1 + L^2} \int_{B'_r} \big|\varphi_k(x', \eta(x'))\big| \, dx' \\
&\le \sqrt{1 + L^2} \int_\Omega |\nabla \varphi_k| \, dx.
\end{aligned}$$

□

Proposizione 2. *Siano $p \in [1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto, limitato, di classe C^1. Allora, esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni funzione $\varphi \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, si ha*

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi|^p \, d\mathcal{H}^{d-1} \le C \bigg(\int_\Omega |\varphi|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx \bigg).$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$, consideriamo la funzione

$$\varphi_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 + \varphi^2}.$$

Siccome φ_ε^p è una funzione in $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, abbiamo che

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi_\varepsilon|^p \, d\mathcal{H}^{d-1} \le C\bigg(\int_\Omega |\varphi_\varepsilon|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla \varphi_\varepsilon|^p \, dx \bigg).$$

D'altra parte

$$\nabla \varphi_\varepsilon = p\big(\sqrt{\varepsilon^2 + \varphi^2}\big)^{p-2} \varphi \nabla \varphi \,,$$

e quindi, per il fatto che $|\varphi| \le \varphi_\varepsilon$ e per la disuguaglianza di Young,

$$|\nabla \varphi_\varepsilon|^p \le p^p \varphi_\varepsilon^{p-1} |\nabla \varphi| \le p^p \left(\frac{p-1}{p} \varphi_\varepsilon^p + \frac{1}{p} |\nabla \varphi|^p \right).$$

Di conseguenza, esiste una costante $C = C(p, \Omega) > 0$ tale per cui

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi_\varepsilon|^p \, d\mathcal{H}^{d-1} \le C\bigg(\int_\Omega |\varphi_\varepsilon|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx \bigg).$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi|^p \, d\mathcal{H}^{d-1} \le C\bigg(\int_\Omega |\varphi|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx \bigg).$$

□

Definizione di traccia per funzioni di Sobolev su insiemi regolari

Lemma 3. *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e limitato di classe C^1. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e sia $\varphi_n : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni in*

$$W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

che converge fortemenete in $W^{1,p}(\Omega)$ a u. Allora, la successione

$$\varphi_n : \partial\Omega \to \mathbb{R}$$

è una successione di Cauchy in $L^p(\partial\Omega)$. Inoltre, se

$$\varphi_n \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \qquad e \qquad \psi_n \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

sono due successioni che convergono a u fortemente in $W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, allora

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n - \psi_n\|_{L^p(\partial\Omega)} = 0,$$

e quindi il limite delle successioni $\varphi_n : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ e $\psi_n : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ in $L^p(\partial\Omega)$ è lo stesso.

Definizione 4. *Data una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$, definiamo la traccia di u su $\partial\Omega$ come l'unica funzione*

$$T(u) \in L^p(\partial\Omega)$$

ottenuta come limite in $L^p(\partial\Omega)$ di una (qualsiasi) successione di funzioni

$$\varphi_n \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

che converge fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$ alla funzione u.

Per indicare la traccia di $u \in W^{1,p}(\Omega)$ su $\partial\Omega$ useremo ancora la stessa lettera u.

Teorema 5. *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e limitato di classe C^1. Allora, esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p \, d\mathcal{H}^{d-1} \le C\bigg(\int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \bigg) \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Osservazione 6. *L'operatore che associa ad ogni funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ la sua traccia $u \in L^p(\partial\Omega)$ è un operatore lineare e limitato.*

Funzioni in $W^{1,p}$ con traccia nulla e spazi $W_0^{1,p}$

Teorema 7. *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e limitato di classe C^1. Data una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$, sono equivalenti:*

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *;*
(ii) *la traccia di u su $\partial\Omega$ è nulla.*

Dimostrazione. L'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) segue direttamente dalla definizione. Infatti, basta osservare che per definizione di $W_0^{1,p}(\Omega)$ esiste una successione $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ che converge a u forte in $W^{1,p}$. Siccome la traccia di u è il limite delle tracce di φ_n e $\varphi_n = 0$ su $\partial\Omega$, abbiamo che anche la traccia di u è zero su $\partial\Omega$.

Dimostriamo ora che (ii) $\Rightarrow$ (i). Sia ϕ_k, $k = 1, \dots, N$, la partizione dell'unità associata a Ω. Sia $u_k := u\phi_k$. Basta dimostrare che per ogni k, $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Per costruzione, sappiamo che:

- u_k ha traccia nulla su $\partial\Omega$;
- u_k è supportata su un aperto $\mathcal{C}$ che a meno di rotazioni è dato da $\mathcal{C} := B_r' \times (-\delta/2, \delta/2)$;
- esiste una funzione $\eta : B_{2r}' \to \mathbb{R}$ di classe C^1 a valori in $(-\delta/2, \delta/2)$, tale che

$$\Omega \cap \Big(B_{2r}' \times (-2\delta, 2\delta)\Big) = \Big\{(x', x_d) \in B_{2r}' \times (-2\delta, 2\delta) \ : \ x_d > \eta(x')\Big\}.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo la funzione

$$\varphi_\varepsilon(x', x_d) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_d \geq \eta(x') + 2\varepsilon \\ 0 & \text{se} \quad x_d \leq \eta(x') + \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}\Big(x_d - (\eta(x') + \varepsilon)\Big) & \text{se} \quad \eta(x') + \varepsilon \leq x_d \leq \eta(x') + 2\varepsilon. \end{cases}$$

Osserviamo che:

- per ogni $\varepsilon > 0$, $u_k\phi_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$;
- per $\varepsilon \to 0$, $u_k\varphi_\varepsilon \to u_k$ fortemente in $L^p(\Omega)$.

Quindi, per mostrare che $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$, basta dimostrare che $\varphi_\varepsilon u_k \to u_k$ fortemente in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Esiste una costante C_p (che dipende solo da $p > 1$) tale che

$$\int_\Omega |\nabla(u_k - \varphi_\varepsilon u_k)|^p \, dx \leq C_p\bigg(\int_\Omega (1 - \varphi_\varepsilon)^p |\nabla u_k|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla\varphi_\varepsilon|^p u_k^p \, dx\bigg).$$

Siccome $\varphi_\varepsilon \uparrow 1$, abbiamo che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega (1 - \varphi_\varepsilon)^p |\nabla u_k|^p \, dx = 0.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\varphi_\varepsilon|^p |u_k|^p \, dx &= \int_{B_r'} dx' \int_{\eta(x')+\varepsilon}^{\eta(x')+2\varepsilon} |\nabla\varphi_\varepsilon|^p |u_k|^p \, dx_d \\ &\leq \frac{C^p}{\varepsilon^p} \int_{B_r'} dx' \int_{\eta(x')+\varepsilon}^{\eta(x')+2\varepsilon} |u_k(x', x_d)|^p \, dx_d \\ &\leq \frac{C^p}{\varepsilon^p} \int_{B_r'} dx' \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} |u_k(x', x_d)|^p \, dx_d.\end{aligned}$$

Ora, per (quasi-)ogni $x' \in B_r'$, abbiamo che

$$\begin{aligned}|u_k(x', x_d)|^p &\leq \bigg(\int_{\eta(x')}^{x_d} |\nabla u_k|(x', t) \, dt\bigg)^p \\ &\leq (x_d - \eta(x'))^{p-1} \int_{\eta(x')}^{x_d} |\nabla u_k|^p(x', t) \, dt.\end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\varphi_\varepsilon|^p |u_k|^p \, dx &\le \frac{C^p}{\varepsilon^p} \int_{B'_r} dx' \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} |u_k(x', x_d)|^p \, dx_d \\
&\le \frac{C^p}{\varepsilon^p} \int_{B'_r} dx' \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} \left((x_d - \eta(x'))^{p-1} \int_{\eta(x')}^{x_d} |\nabla u_k|^p (x', t) \, dt \right) dx_d \\
&= \frac{C^p}{\varepsilon^p} \int_{B'_r} \left(\int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} |\nabla u_k|^p (x', t) \, dt \right) \left(\int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} (x_d - \eta(x'))^{p-1} \, dx_d \right) dx' \\
&= \frac{C^p}{\varepsilon^p} \int_{B'_r} \left(\int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} |\nabla u_k|^p (x', t) \, dt \right) \left(\frac{1}{p} (2\varepsilon)^p \right) dx' \\
&= \frac{C^p 2^p}{p} \int_{B'_r} \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} |\nabla u_k|^p (x', t) \, dt \, dx'.
\end{aligned}$$

Ora, siccome

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B'_r} \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} |\nabla u_k|^p (x', t) \, dt \, dx' = 0,$$

abbiamo che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla\varphi_\varepsilon|^p |u_k|^p \, dx = 0,$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla(u_k - \varphi_\varepsilon u_k)|^p \, dx = 0.$$

$\square$