Teoremi di approssimazione

Teorema di approssimazione in $W^{1,p}(\mathbb{R})$

Teorema 1. *Sia $p \in [1, +\infty)$. Allora, per ogni funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, esiste una successione $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione.
Step 1. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, possiamo trovare una funzione $\eta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che:

- $\eta_k \equiv 1 \quad \text{su} \quad [-k; k]$;
- $\eta_k \equiv 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R} \setminus (-k-1; k+1)$;
- $|\eta_k'| \leq 2 \quad \text{su} \quad [-k-1; k+1] \setminus [-k; k]$.

Per costruzione $\eta_k \uparrow 1$ su $\mathbb{R}$. Quindi, per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{k \to +\infty} \|u - \eta_k u\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\|u' - (u\eta_k)'\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|u' - u'\eta_k - u\eta_k'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u'(1-\eta_k)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u\eta_k'\|_{L^p(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Quindi, di nuovo per il teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{k \to +\infty} \|u' - (u\eta_k)'\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0,$$

e di conseguenza, $u\eta_k \to u$ fortmemente in $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Step 2. Sia $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ tale che $v = v' \equiv 0$ su $\mathbb{R} \setminus [-k, k]$ per un qualche $k > 0$. Possiamo quindi approssimare v' in $L^p(\mathbb{R})$ con una successione di funzioni $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ supportate in $(-k-1, k+1)$. Definiamo

$$\Psi_n(x) := \int_{-\infty}^x \psi_n(t)\, dt.$$

Fissata una funzione $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ supportata in $[k+2, k+3]$ e tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(t)\, dt = 1,$$

consideriamo la successione di funzioni

$$u_n(x) := \Psi_n(x) - \int_{\mathbb{R}} \Big(\psi_n(t) - v'(t)\Big)\, dt \int_{-\infty}^x \eta(s)\, ds.$$

Per costruzione, abbiamo che

$$u_n \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Inoltre, per ogni $n \geq 1$, il supporto di u_n è contenuto nell'intervallo $[-k, k+3]$. Infatti, per ogni $y \geq k+3$, si ha:

$$u_n(y) := \Psi_n(y) - \int_{\mathbb{R}} \Big(\psi_n(t) - v'(t)\Big)\, dt \int_{-\infty}^y \eta(s)\, ds = \int_{-\infty}^y \psi_n(t)\, dt - \int_{\mathbb{R}} \Big(\psi_n(t) - v'(t)\Big)\, dt = 0.$$

Quindi, basta verificare che

$$u_n \to v \quad \text{in} \quad W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Siccome, le funzioni u_n, u_n', v e v' sono supportate in $[-k, k+3]$, è sufficiente mostrare che

$$u_n' \to v' \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R}).$$

Infine, dalla stima

$$\begin{aligned}\|u_n' - v'\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|\psi_n - v'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \left| \int_{\mathbb{R}} \Big(\psi_n(t) - v'(t)\Big)\, dt \right| \|\eta'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\psi_n - v'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\psi_n - v'\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\eta'\|_{L^p(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

otteniamo che $\|u_n' - v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ il che conclude la dimostrazione. □

Teorema di approssimazione in $W^{1,p}(I)$

Teorema 2. *Sia $p \in [1, +\infty)$. Allora, per ogni funzione $u \in W^{1,p}(I)$, esiste una successione $u_n \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(I)$.*

Dimostrazione. Segue dal teorema di estensione e dal teorema di approssimazione in $W^{1,p}(\mathbb{R})$. □