Teoremi di estensione

Teorema di estensione da $W^{1,p}(0,+\infty)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R})$

Osserviamo che data una funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, la sua restrizione ad un qualiasi intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è una funzione in $W^{1,p}(I)$. In seguito mostreremo che vale anche il viceversa. Ogni funzione $u \in W^{1,p}(I)$ si può estendere ad una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Il lemma principale è il seguente.

Lemma 1. *Consideriamo un intervallo della forma $(0, b)$, con $b \in (0, +\infty)$.*
Data $u \in W^{1,p}(0, b)$, con $p \in [1, +\infty]$, definiamo le funzioni

$$v : (-b, b) \to \mathbb{R} , \qquad v(x) := \begin{cases} u(x) & se \quad x \geq 0, \\ u(-x) & se \quad x \leq 0; \end{cases}$$

$$w : (-b, b) \to \mathbb{R} , \qquad w(x) := \begin{cases} u'(x) & se \quad x \geq 0, \\ -u'(-x) & se \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Allora, $v, w \in L^p(-b, b)$ e

$$v(x) = \int_0^x w(t)\, dt \qquad per\ ogni \qquad x \in (-b, b).$$

In particolare, $v \in W^{1,p}(-b, b)$ e $v' = w$.

Teorema 2. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto illimitato di $\mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty]$. Allora, data una funzione $u \in W^{1,p}(I)$ si può trovare una funzione $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con le seguenti proprietà:*

$$\widetilde{u} = u \quad su \quad I \ ; \qquad \|\widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)} \ ; \qquad \|\widetilde{u}'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(I)} \ .$$

Teorema di estensione da $W^{1,p}(a,b)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R})$

Lemma 3. *Siano I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia K un sottoinsieme compatto di I. Se $u \in W^{1,p}(I)$ è una funzione tale che*

$$u = 0 \quad e \quad u' = 0 \quad quasi\ ovunque\ su \quad I \setminus K\,,$$

allora, definendo

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & se \quad x \in I \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus I \end{cases} \qquad e \qquad \widetilde{v}(x) = \begin{cases} u'(x) & se \quad x \in I \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus I\ , \end{cases}$$

abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\widetilde{v}(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\widetilde{u}(x)\, dx \quad per\ ogni \quad \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}).$$

In particolare, $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $\widetilde{u}' = \widetilde{v}$.

Dimostrazione. Sia $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ con supporto conenuto in I e tale che

$$\eta \equiv 1 \quad \text{in un intorno di} \quad K.$$

Allora, per ogni $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, abbiamo che

$$\eta\varphi \in C_c^1(I) \qquad \text{e} \qquad (1-\eta)\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \setminus K).$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\widetilde{v}(x)\,dx = \int_K \varphi(x)u'(x)\,dx &= \int_K \Big(\varphi\eta + (1-\eta)\varphi\Big)u'(x)\,dx \\
&= \int_K (\varphi\eta)u'(x)\,dx \\
&= -\int_K (\varphi\eta)'u(x)\,dx = -\int_K \varphi'(x)u(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\widetilde{u}(x)\,dx,
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Lemma 4. *Siano I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty]$. Dati $u \in W^{1,p}(I)$ e $\eta \in C_c^1(I)$, abbiamo che*

$$\eta\, u \in W^{1,p}(I) \qquad e \qquad (\eta u)' = \eta' u + u'\eta\,.$$

Inoltre,

$$\|\eta u\|_{L^p(I)} \le \|\eta\|_{L^\infty(I)}\|u\|_{L^p(I)} \qquad e \qquad \|(\eta u)'\|_{L^p(I)} \le \Big(\|\eta'\|_{L^\infty(I)} + \|\eta\|_{L^\infty(I)}\Big)\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\eta u \in L^p$ con

$$\|\eta u\|_{L^p(I)} \le \|\eta\|_{L^\infty(I)}\|u\|_{L^p(I)},$$

e che $\eta' u + u'\eta \in L^p(I)$ con

$$\begin{aligned}
\|\eta' u + u'\eta\|_{L^p(I)} &\le \|\eta' u\|_{L^p(I)} + \|u'\eta\|_{L^p(I)} \\
&\le \|\eta'\|_{L^\infty(I)}\|u\|_{L^p(I)} + \|\eta\|_{L^\infty(I)}\|u'\|_{L^p(I)} \\
&\le \Big(\|\eta'\|_{L^\infty(I)} + \|\eta\|_{L^\infty(I)}\Big)\|u\|_{W^{1,p}(I)}.
\end{aligned}$$

Quindi , basta dimostrare che $\eta' u + u'\eta$ sia la derivata debole di ηu.
Data una qualsiasi funzione $\varphi \in C_c^1(I)$, calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_I \eta u \varphi'\,dx &= \int_I u\Big((\eta\varphi)' - \eta'\varphi\Big)\,dx \\
&= \int_I u(\eta\varphi)'\,dx - \int_I \eta'\varphi\,dx \\
&= -\int_I u'\eta\varphi\,dx - \int_I \eta'\varphi\,dx \\
&= -\int_I \varphi(x)\Big(u'\eta + \eta' u\Big)\,dx,
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Teorema 5. *Dati un intervallo aperto limitato $I \subset \mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty]$, esiste una costante $C > 0$ tale che, per ogni $u \in W^{1,p}(I)$ si può trovare una funzione $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con le seguenti proprietà:*

$$\widetilde{u} = u \quad su \quad I\ ; \qquad \|\widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\|u\|_{L^p(I)}\ ; \qquad \|\widetilde{u}'\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)}\ .$$