Teorema fondamentale del calcolo integrale e teorema di rappresentazione in $W^{1,p}(I)$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Lemma 1. *Sia $I = (a, b)$ un intervallo in $\mathbb{R}$, con $-\infty \le a < b \le +\infty$ e sia $c \in (a, b)$ (se $a > -\infty$, possiamo prendere anche $c = a$; analogamente, se $b < +\infty$, possiamo prendere $c = b$). Sia $g \in L^p(I)$ per un qualche $p \in [1, +\infty]$. Allora la funzione*

$$G : I \to \mathbb{R}\ , \qquad G(x) = \int_c^x g(t)\, dt\,,$$

è continua su I e

$$\int_I G(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_I g(t)\varphi(t)\, dt \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in C^1_c(I).$$

In particolare, se I è limitato, allora $G \in W^{1,p}(I) \cap C(I)$ e $G' = g$.

Dimostrazione. Definiamo $I_+ := (c, b)$, $I_- := (a, c)$ e prendiamo $\varphi \in C^1_c(I)$. Allora:

$$\begin{aligned}
\int_{I_+} G(x)\varphi'(x)\, dx &= \int_c^b \int_c^x g(t)\, dt\, \varphi'(x)\, dx \\
&= \int_c^b \int_c^b \mathbb{1}_{[c,x]}(t) g(t)\varphi'(x)\, dt\, dx \\
&= \int_c^b \int_c^b \mathbb{1}_{[c,x]}(t) g(t)\varphi'(x)\, dx\, dt \\
&= \int_c^b \int_c^b \mathbb{1}_{[t,b]}(x) g(t)\varphi'(x)\, dx\, dt \\
&= \int_c^b g(t) \int_t^b \varphi'(x)\, dx\, dt \\
&= \int_c^b g(t)\Big(\varphi(b) - \varphi(t)\Big)\, dt = -\int_c^b g(t)\varphi(t)\, dt = -\int_{I_+} g(t)\varphi(t)\, dt\,.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\int_{I_-} G(x)\varphi'(x)\, dx &= \int_a^c \int_c^x g(t)\, dt\, \varphi'(x)\, dx \\
&= -\int_a^c \int_x^c g(t)\, dt\, \varphi'(x)\, dx \\
&= -\int_a^c \int_a^c \mathbb{1}_{[x,c]}(t) g(t)\varphi'(x)\, dx\, dt \\
&= -\int_a^c \int_a^c \mathbb{1}_{[a,t]}(x) g(t)\varphi'(x)\, dx\, dt \\
&= -\int_a^c g(t) \int_a^t \varphi'(x)\, dx\, dt \\
&= -\int_a^c g(t)\Big(\varphi(t) - \varphi(a)\Big)\, dt \\
&= -\int_a^c g(t)\varphi(t)\, dt = -\int_{I_-} g(t)\varphi(t)\, dt\,.
\end{aligned}$$

Siccome

$$\int_I G(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{I_+} G(x)\varphi'(x)\,dx + \int_{I_-} G(x)\varphi'(x)\,dx$$
$$= -\int_{I_+} g(x)\varphi(x)\,dx - \int_{I_-} g(x)\varphi(x)\,dx = -\int_I g(x)\varphi(x)\,dx\,,$$

abbiamo la tesi. □

Funzioni con derivata debole nulla

Lemma 2. *Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $u \in L^p(I)$ una funzione tale che*

$$\int_I u(x)\varphi'(x)\,dx = 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad \varphi \in C_c^1(I).$$

Allora, u è costante su I.

Dimostrazione. Osserviamo che basta dimostrare il lemma per un intervallo limitato della forma

$$I = (a, b).$$

Fissiamo una funzione $\phi \in C_c^\infty(I)$, con $\displaystyle\int_I \phi(x)\,dx = 1$. Data una qualsiasi funzione

$$\eta \in C_c(I),$$

definiamo la funzione

$$\psi(x) = \eta(x) - \Big(\int_I \eta(t)\,dt\Big)\phi(x).$$

Allora, per costruzione, la funzione

$$\Psi(x) := \int_a^x \psi(y)\,dy$$

è in $C_c^1(I)$ e $\Psi'(x) = \psi(x)$. Quindi,

$$0 = \int_I u(x)\Psi'(x)\,dx = \int_I u(x)\Big(\eta(x) - \Big(\int_I \eta(t)\,dt\Big)\phi(x)\Big)\,dx$$
$$= \int_I u(x)\eta(x)\,dx - \int_I u(x)\phi(x)\,dx \int_I \eta(t)\,dt$$
$$= \int_I u(t)\eta(t)\,dt - \int_I u(x)\phi(x)\,dx \int_I \eta(t)\,dt$$
$$= \int_I \eta(t)\Big(u(t) - \int_I u(x)\phi(x)\,dx\Big)\,dt.$$

Siccome η è arbitraria, otteniamo che $\quad u \equiv \displaystyle\int_I u(x)\phi(x)\,dx \quad$ sull'intervallo I. □

Osservazione 3. *Nella dimostrazione del lemma precedente uno potrebbe usare come funzione test*

$$\varphi(x) = \eta(x) - \frac{1}{|I|}\int_I \eta(x)\,dx$$

al posto di

$$\psi(x) = \eta(x) - \Big(\int_I \eta(t)\,dt\Big)\phi(x).$$

Osserviamo però che quando

$$\int_I \eta(t)\,dt \neq 0\,,$$

il supporto della funzione

$$\Phi(x) := \int_a^x \varphi(x)\,dx\,.$$

contiene il punto a. Quindi, $\Phi \notin C_c^1(I)$. Si potrebbe ovviare a questo problema usando un argomento di approssimazione per mostrare che

$$\int_I u(x)\Phi'(x)\,dx = 0.$$

Teorema di rappresentazione

Teorema 4. *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ e sia $u \in W^{1,p}(I)$ per un qualche $p \in [1, +\infty]$. Allora, esiste una funzione continua $\widetilde{u} : I \to \mathbb{R}$ tale che $\widetilde{u} = u$ quasi-ovunque in I e*

$$\widetilde{u}(y) - \widetilde{u}(x) = \int_x^y u'(t)\,dt \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in I.$$

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in I$ e consideriamo la funzione

$$v(x) = \int_{x_0}^x u'(t)\,dt.$$

Allora, $v : I \to \mathbb{R}$ è continua e

$$\int_I \big(u(x) - v(x)\big)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in C_c^1(I).$$

Di conseguenza, esiste una costante C tale che

$$u(x) = v(x) + C \quad \text{quasi-ovunque su} \quad I\,.$$

Quindi, basta scegliere $\widetilde{u}(x) := v(x) + C$. □