Equazioni ellittiche su intervalli. Soluzioni forti e soluzioni deboli

Soluzioni deboli

Definizione 1. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $V \in L^1(I)$ e $f \in L^2(I)$.*
Diciamo che $u \in H_0^1(I)$ è una soluzione debole dell'equazione

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H_0^1(I)\,,$$

se per ogni $\varphi \in H_0^1(I)$ si ha

$$\int_I u'(x)\varphi'(x)\,dx + \int_I V(x)u(x)\varphi(x)\,dx = \int_I f(x)\varphi(x)\,dx \qquad per\ ogni \qquad \varphi \in H_0^1(I)\,.$$

Osservazione 2. *Se $u \in H_0^1(I)$ è una funzione tale che*

$$\int_I u'(x)\varphi'(x)\,dx + \int_I V(x)u(x)\varphi(x)\,dx = \int_I f(x)\varphi(x)\,dx \qquad per\ ogni \qquad \varphi \in C_c^\infty(I)\,,$$

allora u è soluzione debole di

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H_0^1(I)\,.$$

Soluzioni forti

Definizione 3. *Dato un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$, definiamo lo spazio*

$$H^2(I) = \Big\{ u \in H^1(I) \ :\ u' \in H^1(I) \Big\}.$$

Definizione 4. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $V \in L^2(I)$ ed $f \in L^2(I)$.*
Diciamo che $u \in H_0^1(I)$ sia una soluzione forte di

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H_0^1(I)\,,$$

se $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ e se la derivata debole di u' sia uguale a

$$Vu - f\,.$$

Osservazione 5. *Dati un intervallo aperto limitato $I = (a, b)$ ed una funzione $f \in L^2(a, b)$, definiamo la funzione*

$$u(x) = \int_a^x \left(C - \int_a^y f(t)\,dt \right) dy\,,$$

dove

$$C := \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^y f(t)\,dt\,dy.$$

Quindi, per costruzione, abbiamo che

$$u(a) = u(b) = 0\,,$$

$$u'(x) = C - \int_a^x f(t)\,dt \qquad e \qquad u''(x) = -f(x)\,.$$

In particolare, per ogni $f \in L^2(I)$ esiste una soluzione forte del problema

$$-u'' = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H_0^1(I)\,.$$

Le soluzioni forti sono soluzioni deboli

Sia $u \in H^2(I) \cap H^1_0(I)$ una soluzione forte di

$$-u'' + Vu = f \quad \text{in} \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,,$$

per $V \in L^2(I)$ ed $f \in L^2(I)$. Siccome, per definizione di $H^2(I)$, abbiamo $u' \in H^1(I)$, otteniamo che

$$\int_I u'(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_I u''(x)\varphi(x)\,dx = \int_I \big(-u''(x)\big)\varphi(x)\,dx = \int_I \Big(f(x) - V(x)u(x)\Big)\varphi(x)\,dx.$$

Quindi, u è anche soluzione debole di

$$-u'' + Vu = f \quad \text{in} \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,.$$

Le soluzioni deboli sono soluzioni forti

Sia I un intervallo aperto limitato in $\mathbb{R}$ e siano $V \in L^2(I)$ ed $f \in L^2(I)$.
Se $u \in H^1_0(I)$ è una soluzione debole si

$$-u'' + Vu = f \quad \text{in} \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,,$$

allora, per ogni $\varphi \in C^1_c(I)$, abbiamo

$$\int_I u'(x)\varphi'(x)\,dx = \int_I \Big(f(x) - V(x)u(x)\Big)\varphi(x)\,dx\,,$$

dove

$$f - uV \in L^2(I).$$

Quindi, per definizione

$$u' \in H^1(I)$$

e la sua derivata debole, u'', è data da

$$Vu - f\,.$$

Quindi, u è soluzione forte di

$$-u'' + Vu = f \quad \text{in} \quad I\,, \qquad u \in H^2(I) \cap H^1_0(I)\,.$$

Regolarità delle soluzioni forti

Supponiamo che I sia un intervallo in $\mathbb{R}$ e che

$$V \in C(I) \cap L^2(I) \qquad \text{e} \qquad f \in C(I) \cap L^2(I).$$

Se $u \in H^2(I) \cap H^1_0(I)$ è una soluzione forte di

$$-u'' + Vu = f \quad \text{in} \quad I\,, \qquad u \in H^2(I) \cap H^1_0(I)\,,$$

allora

$$u \in C^2(I).$$

Questo fatto è una conseguenza dal teorema seguente.

Teorema 6. *Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$. Se $u \in H^1(I)$ e se u' è una funzione continua su u, allora $u \in C^1(I)$.*

Dimostrazione. Segue dalla formula

$$u(x) - u(a) = \int_a^x u'(t)\,dt$$

e dal teorema fondamentale del calcolo integrale. □