Convergenza debole in sottospazi chiusi

Teorema 1. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach e sia $V \subset \mathcal{B}$ un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{B}$. Se $u_n \in V$ è una successione debolmente convergente a $b \in \mathcal{B}$, allora $b \in V$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $b \notin V$. Siccome V è chiuso e $b \notin V$, abbiamo che

$$m := \inf \Big\{ \|b - v\|_{\mathcal{B}} \ :\ v \in V \Big\} > 0.$$

Consideriamo ora lo spazio vettoriale

$$W = \Big\{ v + \lambda b \ :\ v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R} \Big\},$$

e definiamo la mappa

$$T : W \to \mathbb{R}\ , \qquad T(v + \lambda b) = \lambda.$$

Osserviamo che T è una mappa ben definita e lineare. Inoltre, T è anche limitata. Infatti, per ogni

$$v + \lambda b \in W,$$

abbiamo:

$$|T(v + \lambda b)| = |\lambda| = |\lambda| \frac{\|v + \lambda b\|_{\mathcal{B}}}{\|v + \lambda b\|_{\mathcal{B}}} = \frac{\|v + \lambda b\|_{\mathcal{B}}}{\|\lambda^{-1} v + b\|_{\mathcal{B}}} \le \frac{1}{m} \|v + \lambda b\|_{\mathcal{B}}\,.$$

Ora, per il teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale lineare limitato

$$S : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$

tale che

$$S(b) = 1 \qquad \text{e} \qquad S(v) = 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in V\,.$$

Di conseguenza,

$$S(b) = 1 \ne 0 = \lim_{n \to \infty} S(u_n),$$

e quindi u_n non converge debolmente a b. Assurdo. $\square$

Corollario 2. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $p \in (1, +\infty)$. Se una successione $u_n \in W_0^{1,p}(I)$ converge debolmente in $W^{1,p}(I)$ ad una funzione $u \in W^{1,p}(I)$, allora $u \in W_0^{1,p}(I)$.*