

## Convergenza debole

### CONVERGENZA DEBOLE IN $L^p(\Omega)$ ED IN SPAZI DI BANACH

Siano  $p \in (1, +\infty)$  ed  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un insieme misurabile secondo Lebesgue. Diciamo che una successione  $f_n \in L^p(\Omega)$  converge debolmente a  $f \in L^p(\Omega)$  (e scriviamo  $f_n \rightharpoonup f$  in  $L^p(\Omega)$ ), se:

$$\int_{\Omega} f_n(x)g(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \quad \text{per ogni} \quad g \in L^q(\Omega),$$

dove, come al solito,

$$q := \frac{p}{p-1}.$$

Più in generale, dato uno spazio di Banach  $\mathcal{B}$ , diciamo che una successione  $u_n \in \mathcal{B}$  converge debolmente a  $u \in \mathcal{B}$  (e scriviamo  $u_n \rightharpoonup u$ ), se

$$T(u_n) \rightarrow T(u) \quad \text{per ogni} \quad T \in \mathcal{B}',$$

dove  $\mathcal{B}'$  è lo spazio duale di  $\mathcal{B}$ .

Inoltre, diremo che una successione  $u_n \in \mathcal{B}$  converge fortemente a  $u \in \mathcal{B}$  (e scriviamo  $u_n \rightarrow u$ ), se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{\mathcal{B}} = 0.$$

### Unicità del limite debole in $L^p(\Omega)$

Osserviamo che se una successione  $u_n \in L^p(\Omega)$  converge debolmente, allora il limite debole è univocamente determinato. Infatti, supponiamo che esistono due funzioni  $u, v \in L^p(\Omega)$  tali che:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{e} \quad u_n \rightharpoonup v.$$

Allora, per ogni funzione  $\varphi \in L^q(\omega)$ , abbiamo che

$$\int_{\Omega} u\varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n\varphi dx = \int_{\Omega} v\varphi dx,$$

e quindi

$$\int_{\Omega} (u - v)\varphi dx = 0.$$

Scegliendo  $\varphi = (u - v)|u - v|^{p-2}$ , otteniamo che

$$\int_{\Omega} |u - v|^p dx = 0,$$

e quindi  $u = v$ .

### Unicità del limite debole in uno spazio di Banach

Anche in uno spazio di Banach è vero che il limite debole è univocamente determinato. Infatti, se  $u_n \in \mathcal{B}$  è una successione tale che converge debolmente in  $\mathcal{B}$  a due elementi  $u, v \in \mathcal{B}$ :

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{e} \quad u_n \rightharpoonup v,$$

allora, per ogni funzionale lineare continuo  $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  si ha che

$$T(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = T(v),$$

e quindi

$$T(u - v).$$

Ora, per il teorema di Hahn-Banach, abbiamo che se  $u - v \neq 0$ , allora esiste un funzionale lineare continuo  $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $T(u - v) = 1$ . Di conseguenza, si ha che necessariamente  $u = v$ .

## Due osservazioni importanti

**Proposizione 1** (Convergenza forte  $\Rightarrow$  convergenza debole). *Se  $u_n$  è una successione in uno spazio di Banach  $\mathcal{B}$  che converge fortemente a  $u \in \mathcal{B}$ , allora  $u_n$  converge debolmente a  $u$ .*

**Proposizione 2.** *Sia  $u_n$  una successione limitata in uno spazio di Banach  $\mathcal{B}$ . Sia  $\mathcal{C}'$  un sottoinsieme denso di  $\mathcal{B}'$ . Allora, sono equivalenti:*

- (1)  $u_n \rightharpoonup u$  debolmente in  $\mathcal{B}$ ;
- (2)  $T(u_n) \rightarrow T(u)$  per ogni  $T \in \mathcal{C}$ .

## Esercizi ed esempi

**Esercizio 3.** *Siano  $p \in (1, +\infty)$  ed  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Sia  $x_n$  una successione di punti in  $\mathbb{R}^d$ . Per ogni  $n \geq 1$ , definiamo:*

$$f_n(x) := f(x - x_n).$$

- (a) *Se  $|x_n| \rightarrow 0$ , allora  $f_n$  converge ad  $f$  fortemente in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .*
- (b) *Se  $|x_n| \rightarrow +\infty$ , allora  $f_n$  converge a 0 debolmente in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .*

**Esercizio 4.** *In  $L^2([0, 1])$ , consideriamo la successione*

$$u_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{2k}{2n} \leq x < \frac{2k+1}{2n} \text{ per un qualche } 0 \leq k \leq n-1 \\ 0 & \text{se } \frac{2k+1}{2n} \leq x < \frac{2k+2}{2n} \text{ per un qualche } 0 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

*Dimostrare che  $u_n$  converge debolmente alla funzione costante  $1/2$ .*

**Esercizio 5.** *In  $L^2([0, \pi])$ , consideriamo la successione*

$$u_n(x) := \sin(nx)$$

*Dimostrare che  $u_n$  converge debolmente alla funzione costante 0.*

**Esercizio 6.** *Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert separabile. Sia  $\phi_n$  un sistema ortonormale completo di  $\mathcal{H}$ . Mostrare che  $\phi_n \rightharpoonup 0$  in  $\mathcal{H}$ .*

**Esercizio 7.** *Siano  $p \in (1, +\infty)$  ed  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  e sia  $R_n \rightarrow +\infty$ . Per ogni  $n \geq 1$ , definiamo*

$$f_n(x) := \frac{1}{R_n^{d/p}} f(x/R_n).$$

*Dimostrare che  $f_n \rightharpoonup 0$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .*

---

## COMPATTEZZA DEBOLE DELLE SUCCESSIONI LIMITATE.

**Teorema 8.** *Sia  $\mathcal{B}$  uno spazio di Banach separabile (ossia  $\mathcal{B}$  contiene un insieme denso numerabile  $\mathcal{C}$ ). Sia  $T_n$  una successione limitata in  $\mathcal{B}'$ :*

$$\|T_n\|_{\mathcal{B}'} \leq L \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

*Allora, possiamo trovare una sottosuccessione  $T_{n_k}$  ed un operatore lineare continuo  $T \in \mathcal{B}'$  tali che*

$$T_{n_k}(x) \rightarrow T(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{B}.$$

*Dimostrazione.* Sia

$$\mathcal{C} := \{x_j : j \in \mathbb{N}\}.$$

Siccome  $\mathcal{C}$  è numerabile, possiamo supporre (a meno di estrarre una sottosuccessione) che  $T_n(x_j)$  converge (per  $n \rightarrow +\infty$ ). Definiamo

$$T(x_j) := \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x_j).$$

Ora, sia  $x \in \mathcal{B}$  un qualsiasi elemento di  $\mathcal{B}$ . Dimostreremo che  $T_n(x)$  è di Cauchy. Infatti, per ogni  $x_j \in \mathcal{C}$  abbiamo che

$$\begin{aligned} |T_n(x) - T_m(x)| &\leq |T_n(x) - T_n(x_j)| + |T_n(x_j) - T_m(x_j)| + |T_m(x) - T_m(x_j)| \\ &\leq 2L|x - x_j| + |T_n(x_j) - T_m(x_j)|. \end{aligned}$$

Quindi, siccome  $\mathcal{C}$  è denso, anche la successione  $T_n(x)$  è di Cauchy. Quindi, possiamo definire

$$T(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x).$$

Per costruzione, la mappa

$$T : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$$

è lineare. Inoltre, siccome

$$|T(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |T_n(x)| \leq L|x|,$$

abbiamo che  $T$  è anche limitata. □

**Corollario 9.** *In uno spazio di Hilbert separabile, ogni successione limitata ammette una sottosuccessione debolmente convergente.*

**Corollario 10.** *Siano  $p \in (1, +\infty)$  ed  $\Omega$  un insieme misurabile in  $\mathbb{R}^d$ . Allora, ogni successione limitata  $f_n \in L^p(\Omega)$  ammette una sottosuccessione debolmente convergente in  $L^p(\Omega)$ .*

### SEMICONTINUITÀ DELLA NORMA $L^p(\Omega)$

**Teorema 11.** *Siano  $p \in (1, +\infty)$  ed  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Sia  $f_n \in L^p(\Omega)$  una successione che converge debolmente ad una certa funzione  $f \in L^p(\Omega)$ . Allora*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \sup \left\{ \int_{\Omega} f(x)v(x) dx : v \in L^q(\Omega), \|v\|_{L^q(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Inoltre, prendendo

$$g := \frac{1}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{p-1}} f|f|^{p-2},$$

abbiamo che

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \quad \text{e} \quad \|g\|_{L^q(\Omega)} = 1.$$

Quindi

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x)g(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

□

Osserviamo anche che vale il teorema seguente:

**Teorema 12.** Siano  $p \in (1, +\infty)$  ed  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Sia  $f_n \in L^p(\Omega)$  una successione che converge debolmente. Allora, la successione  $\|f_n\|_{L^p(\Omega)}$  è limitata.

---

### TEOREMA DI RADON-RIESZ

**Teorema 13** (Dimostrazione nel caso  $p \geq 2$ ). Siano  $p \in (1, +\infty)$  ed  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Siano  $f_n \in L^p(\Omega)$  una successione ed  $f \in L^p(\Omega)$  una funzione. Allora, sono equivalenti:

- (1)  $f_n \rightharpoonup f$  e  $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \|f\|_{L^p(\Omega)}$ ;
- (2)  $f_n \rightarrow f$  fortemente in  $L^p(\Omega)$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo che (1) implica (2) nel caso  $p = 2$ . Infatti,

$$\|f_n - f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f_n^2 dx - \int_{\Omega} f^2 dx + 2 \int_{\Omega} (f - f_n)f \rightarrow 0.$$

Supponiamo ora che  $p \geq 2$ . Per la disuguaglianza di Clarkson,

$$\left\| \frac{f_n - f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2} \|f_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2} \|f\|_{L^p(\Omega)}^p - \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p$$

Siccome  $\frac{1}{2}(f_n + f) \rightharpoonup f$ , abbiamo che

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{f_n - f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \|f_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2} \|f\|_{L^p(\Omega)}^p - \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right) \\ &\leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^p - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^p - \|f\|_{L^p(\Omega)}^p = 0. \end{aligned}$$

□

---

### CONVERGENZA DEBOLE E CONVERGENZA FORTE

**Proposizione 14.** Sia  $\Omega$  un sottoinsieme misurabile in  $\mathbb{R}^d$ . Siano  $p \in (1, +\infty)$  e  $q := \frac{p}{p-1}$ . Sia  $f_n$  una successione in  $L^p(\Omega)$  che converge fortemente a  $f \in L^p(\Omega)$ . Sia  $g_n$  una successione in  $L^q(\Omega)$  che converge debolmente a  $g \in L^q(\Omega)$ . Allora

$$\int_{\Omega} f(x)g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x)g_n(x) dx.$$

*Dimostrazione.* La tesi segue dall'identità

$$\int_{\Omega} (f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)) dx = \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x))g_n(x) dx + \int_{\Omega} (g_n(x) - g(x))f(x) dx.$$

□