Integrazione di funzioni su curve

Definizione

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva in Ω. Se γ è di classe C^1, allora definiamo l'integrale di F su γ come

$$\int_\gamma F := \int_a^b F(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt \ .$$

Se invece $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è una curva C^1 a tratti, definiamo

$$\int_\gamma F := \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt \ ,$$

dove

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$$

è una qualsiasi partizione dell'intervallo $[a, b]$ tale che

$$\gamma : [t_j, t_{j+1}] \to \mathbb{R}^n$$

è di classe C^1 per ogni $j = 0, \ldots, m - 1$.

Linearità dell'integrale

Siano:

- Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$;
- $F : \Omega \to \mathbb{R}$ e $G : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su Ω;
- α e β due numeri reali;
- $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva C^1 a tratti.

Allora

$$\int_\gamma (\alpha F + \beta G) = \alpha \int_\gamma F + \beta \int_\gamma G.$$

Integrazione di una funzione su curve concatenate

Siano Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano

$$\gamma_1 : [a, b] \to \Omega \qquad \text{e} \qquad \gamma_2 : [b, c] \to \Omega$$

due curve C^1 a tratti tali che

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(b).$$

Allora

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F \ ,$$

dove $\gamma_1 * \gamma_2$ è il concatenamento di γ_1 e γ_2.

Integrazione su curve opposte

Siano Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Data una curva C^1 a tratti

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

consideriamo la sua inversa

$$\gamma_- : [b, a] \to \Omega \ , \qquad \gamma_-(t) := \gamma(b + a - t).$$

Allora, ponendo $s := b + a - t$, si ha

$$\int_{\gamma^-} F = \int_a^b F\big(\gamma(b + a - t)\big)\big|\gamma'(b + a - t)\big|\,dt = \int_a^b F(\gamma(s))|\gamma'(s)|\,ds = \int_\gamma F.$$

Integrazione su curve equivalenti

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che le curve

$$\gamma : [a, b] \to \Omega \qquad \text{e} \qquad \sigma : [A, B] \to \Omega$$

siano equivalenti e di classe C^1. Sia

$$g : [a, b] \to [A, B]$$

la funzione di classe C^1 su $[a, b]$ tale che

$$g'(a) = A\,, \quad g'(b) = B\,, \quad g' > 0 \quad \text{su} \quad [a, b],$$

e tale che

$$\gamma(t) = \sigma(g(t)) \quad \text{per ogni} \quad t \in [a, b].$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_a^b F(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \qquad \text{(per definizione)}\\
&= \int_a^b F(\sigma(g(t)))\,|\sigma'(g(t))|g'(t)\,dt \qquad \text{(qui usiamo che } g' > 0\text{)}\\
&= \int_A^B F(\sigma(s))\,|\sigma'(s)|\,ds \qquad \text{(cambiamo variavile: } s = g(t),\ ds = g'(t)\,dt\text{)}\\
&= \int_\sigma F \qquad \text{(per definizione).}
\end{aligned}$$

Lunghezza di una curva C^1 a tratti

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva C^1 a tratti. Definiamo la lunghezza di γ come

$$\text{lunghezza}(\gamma) := \int_\gamma 1.$$

Dai risultati delle sezioni precedenti, abbiamo che:

- se γ è il concatenamento di due curve γ_1 e γ_2, allora
$$\text{lunghezza}(\gamma) = \text{lunghezza}(\gamma_1) + \text{lunghezza}(\gamma_2).$$
- la curva inversa
$$\gamma_- : [b, a] \to \Omega \ , \qquad \gamma_-(t) := \gamma(b + a - t),$$
ha la stessa lunghezza di γ:
$$\text{lunghezza}(\gamma_-) = \text{lunghezza}(\gamma);$$
- se $\sigma : [A, B] \to \mathbb{R}^n$ è una curva equivalente a γ, allora
$$\text{lunghezza}(\sigma) = \text{lunghezza}(\gamma).$$

Esercizi

Esercizio 1. *Su ciascuna delle curve*

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\quad \gamma(t)=(\cos t,\sin t),$$
$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\quad \gamma(t)=(2\cos t,2\sin t),$$

calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma F$*, dove:*

$$(1)\ F(x,y)=1\,;\qquad (2)\ F(x,y)=x^2\,;\qquad (3)\ F(x,y)=xy\,;\qquad (4)\ F(x,y)=ye^x\,.$$

Esercizio 2. *Calcolare la lunghezza della curva*

$$\gamma:[0,4\pi]\to\mathbb{R}\ ,\qquad \gamma(t)=\big(\cos t,\sin t,t\big).$$

Esercizio 3. *Calcolare la lunghezza della curva*

$$\gamma:[0,T]\to\mathbb{R}\ ,\qquad \gamma(t)=\big(e^{-t}\cos t,e^{-t}\sin t\big),$$

in funzione del parametro $T>0$*. Calcolare il limite*

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T|\gamma'(t)|\,dt.$$

Esercizio 4. *Data una funzione*

$$r:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$$

consideriamo la curva

$$\gamma:[0,T]\to\mathbb{R}\ ,\qquad \gamma(r)=\big(r(t)\cos t,r(t)\sin t\big).$$

Dimostrare che la lunghezza di γ *è data da:*

$$\int_0^T\sqrt{r'(t)^2+r(t)^2}\,dt.$$

Esercizio 5. *Sia* γ *una curva semplice, chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo del rettangolo* $[-1,1]\times[-1,1]$*. Data la funzione* $F(x,y)=x^2+y^2$*, calcolare l'integrale* $\displaystyle\int_\gamma F$*.*

Esercizio 6. *Sia* γ *una curva semplice, chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo del rettangolo* $[0,1]\times[0,1]$*. Data la funzione* $F(x,y)=xy$*, calcolare l'integrale* $\displaystyle\int_\gamma F$*.*

Esercizio 7. *Sia* γ *una curva semplice, chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo della circonferenza* $\partial B_1(0,1)$*. Data la funzione* $F(x,y)=y$*, calcolare l'integrale* $\displaystyle\int_\gamma F$*.*

Esempio 8. *Consideriamo la successione di curve*

$$\gamma_n:[0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \gamma_n(t)=(t,t^n).$$

Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}1.$