L'area del disco

Proposizione 1. *In dimensione* 2*, consideriamo la palla aperta e la palla chiusa di centro* $(0,0)$ *e raggio* R*,*

$$B_R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 < R^2\Big\};$$
$$\overline{B}_R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \le R^2\Big\}.$$

Allora, $\overline{B}_R$ *e* B_R *sono misurabili e*

$$|\overline{B}_R| = |B_R| = \pi R^2.$$

Proof. Osserviamo che possiamo scrivere $\overline{B}_R$ come

$$\overline{B}_R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -R \le x \le R,\ u(x) \le y \le v(x)\Big\},$$

dove le funzioni

$$u : [-R,R] \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad v : [-R,R] \to \mathbb{R}$$

sono date da

$$u(x) = -\sqrt{R^2-x^2} \qquad \text{e} \qquad v(x) = \sqrt{R^2-x^2}\ .$$

Siccome u e v sono continue su $[-1,1]$, abbiamo che $\overline{B}_R$ è un dominio normale. (Inoltre, possiamo anhe osservare che siccome

$$u < v \quad \text{su} \quad (-1,1),$$

$\overline{B}_R$ è anche semplice.) Ora, siccome $\overline{B}_R$ è un dominio normale e siccome

$$B_R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -R < x < R,\ u(x) < y < v(x)\Big\},$$

abbiamo che $\overline{B}_R$ e B_R sono misurabili e

$$|\overline{B}_R| = |B_R|.$$

Per calcolare l'area di B_R e $\overline{B}_R$, usiamo la formula di Fubini:

$$|\overline{B}_R| = \iint_{\overline{B}_R} 1\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\,dy = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Ora, cambiando variabile, $y = x/R$ (quindi $x = Ry$), abbiamo

$$2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{R^2-R^2y^2}\ R\,dy = 2R^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\ dy.$$

Ora consideriamo la nuova variabile

$$y = \sin\theta, \qquad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Allora, $dy = \cos\theta\,d\theta$ e

$$\begin{aligned}
|\overline{B}_R| &= 2R^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\ dy \\
&= 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\ \cos\theta\,d\theta \\
&= 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,\cos\theta\,d\theta \quad (\text{siccome } \theta \in [-\pi/2,\pi/2],\ \cos\theta > 0) \\
&= R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2\theta)+1)\,d\theta \\
&= R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,d\theta = R^2\pi.
\end{aligned}$$

□