# Parte interna, chiusura e frontiera di un insieme misurabile
# Unione e intersezione di insiemi misurabili

## La frontiera di un insieme misurabile

**Lemma 1** (Insiemi di misura nulla). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato. Allora sono equivalenti:*

(i) *$\Omega$ è di misura nulla;*

(ii) *per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un rettangolo $\mathcal{R}$ e una partizione $\mathcal{P} = \{\mathcal{R}_{ij}\}_i$, di $\mathcal{R}$ tale che*

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{\mathcal{R}_{ij}\cap\Omega\neq\emptyset} |\mathcal{R}_{ij}| \le \varepsilon$$

(iii) *per ogni $\varepsilon > 0$ $\Omega$ può essere ricoperto con un numero finito di rettangoli chiusi $\big\{\mathcal{R}_i\big\}_{i=1}^N$ tali che*

$$\sum_{i=1}^N |\mathcal{R}_i| < \varepsilon.$$

**Teorema 2.** *Sia $D \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato. Se $D$ è misurabile, allora $\partial D$ ha misura nulla.*

**Dimostrazione.** Sia $\mathcal{R}$ un rettangolo che contiene $D$. Siccome $\chi_D$ è integrabile, per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo trovare una partizione

$$\mathcal{P} = \Big\{R_{ij}\Big\}_{i,j}$$

di $\mathcal{R}$ tale che

$$S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon,$$

dove $S(\mathcal{P})$ e $s(\mathcal{P})$ sono la somma superiore e la somma inferiore di Riemann della funzione indicatrice $\chi_D$. Osserviamo che per ogni rettangolo $R_{ij}$ della partizione si ha:

$$\text{Se} \quad \partial D \cap \mathrm{int}(R_{ij}) \neq \emptyset\ , \quad \text{allora} \quad \sup_{R_{ij}} \chi_D - \inf_{R_{ij}} \chi_D = 1.$$

Quindi data la famiglia di rettangoli

$$\mathcal{F} := \Big\{R_{ij} \in \mathcal{P}\ :\ \partial D \cap \mathrm{int}(R_{ij}) \neq \emptyset\Big\},$$

abbiamo che

$$\sum_{R_{ij}\in\mathcal{F}} |R_{ij}| \le S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

D'altra parte la frontiera di ciascun rettangolo $R_{ij}$ ha misura nulla e quindi anche l'unione delle frontiere

$$\bigcup_{i,j} \partial R_{ij}$$

ha misura nulla. Di conseguenza, esiste un'altra famiglia finita di rettangoli aperti $\mathcal{G}$ tale che

$$\bigcup_{i,j} \partial R_{ij} \subset \bigcup_{R\in\mathcal{G}} R \qquad \text{e} \qquad \sum_{R\in\mathcal{G}} |R| < \varepsilon.$$

L'unione delle due famiglie $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ è quindi una famiglia di rettangoli che ricopre $\partial D$ ed è tale che

$$\sum_{R\in\mathcal{F}\cup\mathcal{G}} |R| < 2\varepsilon.$$

□

---

## Parte interna e chiusura di un insieme misurabile

**Lemma 3.** *Sia $D$ un insieme limitato e misurabile e sia $\mathcal{N}$ un insieme limitato e di misura nulla. Allora anche l'insieme $D \cup \mathcal{N}$ è misurabile. Inoltre, si ha $|D \cap \mathcal{N}| = |D|$.*

*Dimostrazione.* Siccome $D$ è misurabile, abbiamo che $\partial D$ ha misura nulla. D'altra parte, anche $\mathcal{N}$ è misurabile e quindi anche $\partial\mathcal{N}$ ha misura nulla. Ora, siccome

$$\partial(D \cup \mathcal{N}) \subset \partial D \cup \partial\mathcal{N} \ ,$$

anche $D \cup \mathcal{N}$ è misurabile. Inoltre,

$$\chi_D \le \chi_{D\cup\mathcal{N}} \le \chi_D + \chi_{\mathcal{N}},$$

e quindi

$$|D| \le |D \cup \mathcal{N}| \le |D| + |\mathcal{N}| = |D|.$$

□

**Teorema 4.** *Sia $D \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato e misurabile. Allora la parte interna* $\mathrm{int}\,(D)$ *e la chiusura $\overline{D}$ sono misurabili e*

$$|D| = |\overline{D}| = |\mathrm{int}\,(D)|.$$

*Dimostrazione.* Siccome $D$ è misurabile, abbiamo che $\partial D$ ha misura nulla. Siccome

$$\overline{D} \setminus D \subset \partial D \qquad \text{e} \qquad D \setminus \mathrm{int}(D) \subset \partial D,$$

abbiamo che

$$\overline{D} \setminus D \qquad \text{e} \qquad D \setminus \mathrm{int}(D),$$

hanno misura nulla. Di conseguenza, $\overline{D}$ e $\mathrm{int}(D)$ sono misurabili e $|\overline{D}| = |\mathrm{int}\,(D)| = |D|$. □

---

## Unione e intersezione di insiemi misurabili

**Teorema 5.** *Siano $D_1 \subset \mathbb{R}^d$ e $D_2 \subset \mathbb{R}^d$ due insiemi limitati. Se $D_1$ e $D_2$ sono misurabili, allora anche l'unione $D_1 \cup D_2$ e l'intersezione $D_1 \cap D_2$ sono misurabili.*

**Dimostrazione.** Per ipotesi $D_1$ e $D_2$ sono misurabili. Si ha quindi che le loro frontiere $\partial D_1$ e $\partial D_2$ sono insiemi misurabili di misura nulla. In particolare, anche l'unione delle due frontiere

$$\partial D_1 \cup \partial D_2$$

ha misura nulla. Ora, siccome

$$\partial(D_1 \cup D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2 \qquad \text{e} \qquad \partial(D_1 \cap D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2 \ ,$$

otteniamo che anche

$$\partial(D_1 \cup D_2) \qquad \text{e} \qquad \partial(D_1 \cap D_2) \ ,$$

hanno misura nulla. Di conseguenza, $D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2$ sono misurabili. □

**Teorema 6.** *Siano $D_1 \subset \mathbb{R}^d$ e $D_2 \subset \mathbb{R}^d$ due insiemi limitati. Supponiamo che:*

(a) *$D_1$ e $D_2$ sono misurabili;*
(b) $\mathrm{int}(D_1) \cap \mathrm{int}(D_2) = \emptyset$.

*Allora, l'insieme $D_1 \cup D_2$ è misurabile e*

$$|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|.$$

**Dimostrazione.** Per il teorema precedente, abbiamo che $D_1 \cup D_2$ è misurabile. Rimane da dimostrare quindi che $|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$. Osserviamo che siccome $D_1$ e $D_2$ sono misurabili, abbiamo che

$$\int \chi_{\Omega_j} = |\Omega_j| = |D_j| = \int \chi_{D_j},$$

dove per semplicità abbiamo posto

$$\Omega_j := \mathrm{int}(D_j).$$

Ora, siccome

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset D_1 \cup D_2,$$

e siccome $\Omega_1$ e $\Omega_2$ sono disgiunti (per ipotesi), abbiamo che

$$\chi_{\Omega_1} + \chi_{\Omega_2} = \chi_{\Omega_1\cup\Omega_2} \le \chi_{D_1\cup D_2} \le \chi_{D_1} + \chi_{D_2} \ .$$

Di conseguenza,

$$|\Omega_1| + |\Omega_2| = \int \chi_{\Omega_1} + \int \chi_{\Omega_2} \le \int \chi_{D_1\cup D_2} \le \int \chi_{D_1} + \int \chi_{D_2} = |D_1| + |D_2|,$$

il che conclude la dimostrazione. □