Cambiamento di variabile in integrali doppi

Applicazioni che mandano rettangoli in rettangoli

Teorema 1. *Siano x_0, y_0, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ delle costanti reali. Consideriamo la mappa*

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad \Phi(x, y) = \big(x_0 + ax, y_0 + by\big)\,.$$

Sia $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo e

$$F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$$

una funzione limitata su $\Phi(\mathcal{R})$. Allora, sono equivalenti

(1) *F è integrabile su $\Phi(\mathcal{R})$;*
(2) *$F \circ \Phi$ è integrabile su $\mathcal{R}$.*

Inoltre, vale la formula

$$\iint_{\mathcal{R}} F\big(\Phi(x, y)\big)\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(\mathcal{R})} F(u, v)\,du\,dv\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che la funzione

$$F \circ \Phi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$$

sia integrabile su $\mathcal{R}$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una patizione

$$\mathcal{P} = \Big\{R_{ij} \ : \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m\Big\}.$$

tale che

$$S(F \circ \Phi, \mathcal{R}; \mathcal{P}) - s(F \circ \Phi, \mathcal{R}; \mathcal{P}) \leq \varepsilon,$$

dove:

$$S(F \circ \Phi, \mathcal{R}; \mathcal{P}) = \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \sup_{X \in R_{ij}} F(\Phi(X)) \qquad \text{e} \qquad s(F \circ \Phi, \mathcal{R}; \mathcal{P}) = \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \inf_{X \in R_{ij}} F(\Phi(X))\,.$$

Inioltre, per la definizione dell'integrale si ha che

$$s(F \circ \Phi, \mathcal{R}; \mathcal{P}) \leq \iint_{\mathcal{R}} F(\Phi(X))\,dX \leq S(F \circ \Phi, \mathcal{R}; \mathcal{P}).$$

Ora, osserviamo che $\Phi(R_{ij})$ è anche un rettangolo e che se R_{ij} ha lati ℓ e κ, allora $\Phi(R_{ij})$ ha lati di lunghezza $|a|\ell$ e $|b|\kappa$. Quindi

$$|\Phi(R_{ij})| = |ab||R_{ij}|.$$

Inoltre,

$$\sup_{X \in R_{ij}} F(\Phi(X)) = \sup_{Y \in \Phi(R_{ij})} F(Y) \qquad \text{e} \qquad \inf_{X \in R_{ij}} F(\Phi(X)) = \inf_{Y \in \Phi(R_{ij})} F(Y).$$

Ora, consideriamo la partizione

$$\mathcal{Q} = \Big\{\Phi(R_{ij}) \ : \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m\Big\},$$

del rettangolo $\Phi(\mathcal{R})$ e si ha

$$S(F, \Phi(\mathcal{R}); \mathcal{Q}) \ = \sum_{\Phi(R_{ij}) \in \mathcal{Q}} |\Phi(R_{ij})| \sup_{X \in R_{ij}} F(\Phi(X)) = |ab| \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \sup_{Y \in \Phi(R_{ij})} F(Y) = |ab| S(F \circ \Phi, \mathcal{R}; \mathcal{P}).$$

Analogamente,

$$s(F, \Phi(\mathcal{R}); \mathcal{Q}) \ = \sum_{\Phi(R_{ij}) \in \mathcal{Q}} |\Phi(R_{ij})| \inf_{X \in R_{ij}} F(\Phi(X)) = |ab| \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \inf_{Y \in \Phi(R_{ij})} F(Y) = |ab| s(F \circ \Phi, \mathcal{R}; \mathcal{P}).$$

Quindi, abbiamo trovato una partizione $\mathcal{Q}$ del rettangolo $\Phi(\mathcal{R})$ tale che:

$$S(F, \Phi(\mathcal{R}); \mathcal{Q}) - s(F, \Phi(\mathcal{R}); \mathcal{Q}) \leq |ab|\varepsilon.$$

Di conseguenza, F è integrabile su $\Phi(\mathcal{R})$ e

$$s(F,\Phi(\mathcal{R});\mathcal{Q}) \le \iint_{\Phi(\mathcal{R})} F(Y)\,dY \le S(F,\Phi(\mathcal{R});\mathcal{Q}),$$

che possiamo scrivere anche come

$$s(F\circ\Phi,\mathcal{R};\mathcal{P}) \le \frac{1}{|ab|}\iint_{\Phi(\mathcal{R})} F(Y)\,dY \le S(F\circ\Phi,\mathcal{R};\mathcal{P}).$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, otteniamo

$$\frac{1}{|ab|}\iint_{\Phi(\mathcal{R})} F(Y)\,dY = \iint_{\mathcal{R}} F(\Phi(X))\,dX,$$

e quindi

$$\iint_{\Phi(\mathcal{R})} F(Y)\,dY = |ab|\iint_{\mathcal{R}} F(\Phi(X))\,dX = \iint_{\mathcal{R}} F\big(\Phi(X)\big)\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dX\,.$$

□

Analogamente, abbiamo che

Teorema 2. *Siano x_0, y_0, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ delle costanti reali. Consideriamo la mappa*

$$\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\qquad \Phi(x,y) = \big(y_0+ay, x_0+bx\big)\,.$$

Sia $\mathcal{R}\subset\mathbb{R}^2$ un rettangolo e

$$F:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$$

una funzione limitata su $\Phi(\mathcal{R})$. Allora, sono equivalenti

(1) *F è integrabile su $\Phi(\mathcal{R})$;*
(2) *$F\circ\Phi$ è integrabile su $\mathcal{R}$.*

Inoltre, vale la formula

$$\iint_{\mathcal{R}} F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(\mathcal{R})} F(u,v)\,du\,dv\,.$$

Integrazione di funzioni dispari

Proposizione 3. *Sia $D\subset\mathbb{R}^2$ un compatto misurabile in $\mathbb{R}^2$, simmetrico rispetto all'asse y, ovvero tale che per un generico punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si ha*

$$(x,y)\in D \quad\Leftrightarrow\quad (-x,y)\in D.$$

Sia $F: D\to\mathbb{R}$ una funzione dispari nella prima variabile, ovvero tale che

$$F(-x,y) = -F(x,y) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in D.$$

Allora

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Dimostrazione. Useremo la formula del cambio di varabili con

$$\Omega_1=\Omega_2=\mathbb{R}^2\ ,\quad D_1=D_2=D\ ,$$

e con

$$\Phi(x,y) = (-x,y) \qquad \text{e} \qquad \Psi(u,v) = (-u,v).$$

Siccome

$$\det\big(D\Phi(x,y)\big) = -1,$$

abbiamo che

$$\iint_D F(u,v)\,du\,dv = \iint_{\Phi(D)} F(u,v)\,du\,dv = \iint_D F(-x,y)\big|\det\big(D\Phi(x,y)\big)\big|\,dx\,dy = -\iint_D F(x,y)\,dx\,dy,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che F sia dispari. □

Area di un'ellisse

Proposizione 4. *Dati due parametri reali $a > 0$ e $b > 0$, consideriamo l'ellisse*

$$E_{a,b} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\Big\}.$$

Allora,

$$\mathrm{Area}\big(E_{a,b}\big) = \pi ab.$$

Dimostrazione. Useremo la formula del cambio di varabili con

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}^2 \ ,$$

e con

$$\Phi(x,y) = (ax, by).$$

Siccome

$$\det\big(D\Phi(x,y)\big) = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab,$$

e siccome

$$\Phi(B_1) = E_{a,b},$$

abbiamo che

$$\mathrm{Area}\big(E_{a,b}\big) = \iint_{\Phi(B_1)} 1\,du\,dv = \iint_{B_1} \big|\det\big(D\Phi(x,y)\big)\big|\,dx\,dy = \iint_{B_1} ab\,dx\,dy = \pi ab.$$

□

Un criterio di integrabilità

Proposizione 5. *Siano $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ ed*

$$F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$$

una funzione limitata su $\mathcal{R}$. Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia di insiemi compatti

$$\mathcal{P}_\varepsilon := \Big\{D_i \subset \mathcal{R} \ : \ i = 1, \dots, N\Big\}$$

con le proprietà seguenti:

- *per ogni $i = 1, \dots, N$, la frontiera ∂D_i ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$ (quindi gli insiemi D_i sono misurabili);*
- *$S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) \le \varepsilon$, dove*

$$S(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^N |D_i| \sup_{D_i} F \qquad e \qquad s(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^N |D_i| \inf_{D_i} F \ .$$

Allora, la funzione F è integrabile su $\mathcal{R}$ e

$$s(\mathcal{P}) \le \iint_{\mathcal{R}} F(X)\,dX \le S(\mathcal{P}).$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Teorema 6. *Siano $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ ed*

$$v : \Omega \to \mathbb{R}$$

una funzione di classe C^1 su un aperto Ω contenente $\mathcal{R}$. Supponiamo che

$$|\partial_y v|(x,y) > 0 \quad \text{per ogni} \quad (x,y) \in \mathcal{R}\,,$$

e consideriamo la mappa

$$\Phi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}\ , \qquad \Phi(x,y) = \Big(x\,,\ v(x,y)\Big).$$

Sia

$$F : \Phi(\mathcal{R}) \to \mathbb{R}$$

una funzione limitata. Se la funzione

$$F \circ \Phi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$$

è integrabile su $\mathcal{R}$, allora anche F è integrabile su $\Phi(\mathcal{R})$ e

$$\iint_{\mathcal{R}} F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(\mathcal{R})} F(u,v)\,du\,dv\,.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che

$$\partial_y v(x,y) > 0 \quad \text{per ogni} \quad (x,y) \in \mathcal{R}\,.$$

Sia $\mathcal{P}$ una partizione di $\mathcal{R}$ generata da

$$\mathcal{P}_{[a,b]} = \Big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\Big\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{P}_{[c,d]} = \Big\{c = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = d\Big\}.$$

Per ogni coppia di indici

$$i \in \{1, \dots, n\} \qquad \text{e} \qquad j \in \{1, \dots, m\}\,,$$

consideriamo il rettangolo

$$R_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]\,,$$

e l'insieme

$$D_{ij} := \Phi(R_{ij}) = \Big\{(x,y) \in D\ :\ x \in [t_{i-1}, t_i],\ v(x, s_{j-1}) \le y \le v(x, s_j)\Big\}.$$

Osserviamo che D_{ij} è un dominio normale semplice di classe C^1. Quindi D_{ij} è misurabile e per Fubini

$$|D_{ij}| = \int_{t_{i-1}}^{t_i} dx \int_{v(x,s_{j-1})}^{v(x,s_j)} dy = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big(v(x,s_j) - v(x,s_{j-1})\Big)\,dx.$$

D'altra parte, usando di nuovo Fubini, ma stavolta su R_{ij}, otteniamo

$$\begin{aligned}\iint_{R_{ij}} |\det(D\Phi)(x,y)|\,dx\,dy &= \iint_{R_{ij}} \partial_y v(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} dx \int_{s_{j-1}}^{s_j} \partial_y v(x,y)\,dy = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big(v(x,s_j) - v(x,s_{j-1})\Big)\,dx\,.\end{aligned}$$

Si ha quindi l'uguaglianza

$$|D_{ij}| = \iint_{R_{ij}} |\det(D\Phi)(x,y)|\,dx\,dy.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i,j} |D_{ij}| \sup_{D_{ij}} F\Big) - \Big(\sum_{i,j} |D_{ij}| \inf_{D_{ij}} F\Big) &= \sum_{i,j} \Big(\sup_{D_{ij}} F - \inf_{D_{ij}} F\Big)|D_{ij}| \\ &= \sum_{i,j} \Big(\sup_{D_{ij}} F - \inf_{D_{ij}} F\Big) \iint_{R_{ij}} |\det(D\Phi)|\,dx\,dy \\ &= \sum_{i,j} \Big(\sup_{R_{ij}} F(\Phi) - \inf_{R_{ij}} F(\Phi)\Big) \iint_{R_{ij}} |\det(D\Phi)|\,dx\,dy\end{aligned}$$

Ora, osserviamo che siccome la funzione
$$|\det(D\Phi)| : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$$
è uniformemente continua su $\mathcal{R}$, possiamo scegliere la partizione $\mathcal{P}$ in modo d'avere
$$-\varepsilon \le |\det(D\Phi)|(X) - |\det(D\Phi)|(Y) \le \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad X, Y \in R_{ij}.$$
In particolare, integrando in Y,
$$-\varepsilon|R_{ij}| \le |\det(D\Phi(X))| \cdot |R_{ij}| - \iint_{R_{ij}} |\det(D\Phi(Y))|\, dY \le \varepsilon|R_{ij}| \quad \text{per ogni} \quad X \in R_{ij}.$$
Quindi, per ogni $X \in R_{ij}$,
$$-\varepsilon|R_{ij}|M \le F(\Phi(X))|\det(D\Phi(X))| \cdot |R_{ij}| - F(\Phi(X)) \iint_{R_{ij}} |\det(D\Phi(Y))|\, dY \le \varepsilon|R_{ij}|M,$$
dove
$$M = \sup_{\mathcal{R}} |F| < +\infty\,.$$
In particolare
$$\sup_{X \in R_{ij}} F(\Phi(X)) \iint_{R_{ij}} |\det(D\Phi)| \le M|R_{ij}|\varepsilon + |R_{ij}| \sup_{X \in R_{ij}} \Big\{F(\Phi(X))|\det(D\Phi(X))|\Big\}\,,$$
$$\inf_{X \in R_{ij}} F(\Phi(X)) \iint_{R_{ij}} |\det(D\Phi)| \ge -M|R_{ij}|\varepsilon + |R_{ij}| \inf_{X \in R_{ij}} \Big\{F(\Phi(X))|\det(D\Phi(X))|\Big\}\,,$$
e quindi
$$\Big(\sup_{R_{ij}} F(\Phi) - \inf_{R_{ij}} F(\Phi)\Big) \iint_{R_{ij}} |\det(D\Phi)| \le 2M|R_{ij}|\varepsilon + |R_{ij}| \left(\sup_{R_{ij}} \Big\{F(\Phi)|\det(D\Phi)|\Big\} - \inf_{R_{ij}} \Big\{F(\Phi)|\det(D\Phi)|\Big\}\right).$$
Sommando su i e j, otteniamo
$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i,j} |D_{ij}| \sup_{D_{ij}} F\Big) - \Big(\sum_{i,j} |D_{ij}| \inf_{D_{ij}} F\Big) &= \sum_{i,j} \Big(\sup_{R_{ij}} F(\Phi) - \inf_{R_{ij}} F(\Phi)\Big) \iint_{R_{ij}} |\det(D\Phi)| \\ &\le 2M|\mathcal{R}|\varepsilon + \sum_{i,j} |R_{ij}| \left(\sup_{R_{ij}} \Big\{F(\Phi)|\det(D\Phi)|\Big\} - \inf_{R_{ij}} \Big\{F(\Phi)|\det(D\Phi)|\Big\}\right).\end{aligned}$$
Ora, siccome la funzione
$$F(\Phi)|\det(D\Phi)| : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$$
è integrabile su $\mathcal{R}$, scegliendo la partizione $\mathcal{P}$ abbastanza fine, abbiamo che
$$\sum_{i,j} |R_{ij}| \left(\sup_{R_{ij}} \Big\{F(\Phi)|\det(D\Phi)|\Big\} - \inf_{R_{ij}} \Big\{F(\Phi)|\det(D\Phi)|\Big\}\right) < \varepsilon.$$
In conclusione,
$$\Big(\sum_{i,j} |D_{ij}| \sup_{D_{ij}} F\Big) - \Big(\sum_{i,j} |D_{ij}| \inf_{D_{ij}} F\Big) \le 2M|\mathcal{R}|\varepsilon + \varepsilon.$$

□

Analogamente, abbiamo il risultato seguente.

Teorema 7. *Siano $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ ed*
$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$
una funzione di classe C^1 su un aperto Ω contenente $\mathcal{R}$. Supponiamo che
$$|\partial_x u|(x, y) > 0 \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathcal{R}\,,$$
e consideriamo la mappa
$$\Phi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad \Phi(x, y) = \Big(u(x, y)\,,\, y\Big).$$
Sia $F : \Phi(\mathcal{R}) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Se la funzione
$$F \circ \Phi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$$

è integrabile su $\mathcal{R}$, allora anche F è integrabile su $\Phi(\mathcal{R})$ e

$$\iint_{\mathcal{R}} F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(\mathcal{R})} F(u,v)\,du\,dv\,.$$

Applicazioni lineari

Teorema 8. *Consideriamo la mappa*

$$\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,,\qquad \Phi(x,y)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix},$$

e supponiamo che

$$\det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=ad-bc\neq 0.$$

Siano $D\subset\mathbb{R}^2$ un insieme limitato ed

$$F:\Phi(D)\to\mathbb{R}$$

una funzione limitata. Allora:

(i) *D è misurabile se e solo se $\Phi(D)$ è misurabile;*
(ii) *F è integrabile su $\Phi(D)$ se e solo se $F\circ\Phi$ è misurabile su D.*

Inoltre, vale la formula

$$\iint_{D} F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(D)} F(u,v)\,du\,dv\,.$$

Dimostrazione. Siccome $ad-bc\neq 0$, abbiamo che

$$ad\neq 0\qquad\text{oppure}\qquad bc\neq 0.$$

Supponiamo che

$$ad\neq 0.$$

Consideriamo le due funzioni

$$\Phi_1(x,y):=(ax+by\,,\,y)\qquad\text{e}\qquad \Phi_2(u,y)=\Big(u\,,\,c\frac{u-by}{a}+dy\Big)=\Big(u\,,\,\frac{c}{a}u+\frac{ad-bc}{a}y\Big),$$

ed osserviamo che

$$\Phi_2\circ\Phi_1=\Phi\,.$$

Infatti,

$$\Phi_2(\Phi_1(x,y))=\Big((ax+by)\,,\,\frac{c}{a}(ax+by)+\frac{ad-bc}{a}y\Big)=(ax+by\,,\,cx+dy)=\Phi(x,y)\,.$$

Quindi le affermazioni (i) e (ii) seguono da Teorema 6 e Teorema 7. Rimane da dimostrare la formula di cambiamento delle variabili.

$$\begin{aligned}\iint_{\Phi_2(\Phi_1(D))} F(u,v)\,du\,dv &= \iint_{\Phi_1(D)} F(\Phi_2(u,y))\big|\det(D\Phi_2(u,y))\big|\,du\,dy\\ &= \iint_D \Big\{F(\Phi_2(\Phi_1(x,y)))\big|\det(D\Phi_2)(\Phi_1(x,y))\big|\Big\}\big|\det(D\Phi_1(x,y))\big|\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Ora, osserviamo che per la formula del differenziale di una funzione composta

$$D\Phi(x,y)=D\Phi_2(\Phi_1(x,y))D\Phi_1(x,y).$$

In particolare,

$$\det\Big(D\Phi(x,y)\Big)=\det\Big(D\Phi_2(\Phi_1(x,y))\Big)\det\Big(D\Phi_1(x,y)\Big)$$

e sostituendo nella formula di sopra, otteniamo

$$\begin{aligned}\iint_{\Phi(D)} F(u,v)\,du\,dv &= \iint_{\Phi_2(\Phi_1(D))} F(u,v)\,du\,dv\\ &= \iint_D F(\Phi_2(\Phi_1(x,y)))\big|\det\big(D\Phi(x,y)\big)\big|\,dx\,dy\\ &= \iint_D F(\Phi(x,y))\big|\det\big(D\Phi(x,y)\big)\big|\,dx\,dy.\end{aligned}$$

$\square$

Rotazioni di insiemi di $\mathbb{R}^2$

Definizione 9. *Una rotazione di* $\mathbb{R}^2$ *è una mappa*

$$\Phi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

della forma

$$\Phi_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ *è l'angolo di rotazione. Osserviamo, inoltre, che l'inversa di* Φ_α *è la mappa*

$$\Phi_{-\alpha}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Proposizione 10. *Data una rotazione*

$$\Phi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

ed un insieme limitato $D \subset \mathbb{R}^2$ *, abbiamo che* D *è misurabile secondo Riemann se e solo e lo è* $\Phi_\alpha(D)$*. Inoltre,*

$$\operatorname{Area}\big(\Phi_\alpha(D)\big) = \operatorname{Area}(D).$$

Dimostrazione. Useremo la formula del cambiamento delle varabili con

$$\Phi(x,y) = \Phi_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Siccome

$$D\Phi_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

abbiamo che

$$\det\big(D\Phi_\alpha(x,y)\big) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \cos^2\alpha - (-\sin\alpha)\sin\alpha = 1.$$

Quindi, per la formula del cambio di variabili,

$$\operatorname{Area}\big(\Phi_\alpha(D)\big) = \iint_{\Phi_\alpha(D)} 1\,du\,dv = \iint_D 1\big|\det\big(D\Phi_\alpha(x,y)\big)\big|\,dx\,dy = \operatorname{Area}(D). \qquad \square$$

Area di un triangolo in $\mathbb{R}^2$

Triangoli in $\mathbb{R}^d$

Definizione 11. *Dati due punti* A *e* B *in* $\mathbb{R}^d$*, il* **segmento** $[A,B]$ *con estremi* A *e* B *è l'insieme*

$$[A,B] := \Big\{X = \alpha A + \beta B \ : \ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1\Big\}.$$

Si dice che il segmento è degenere se $A = B$*.*

Definizione 12. *Dati tre punti* A, B, C *in* $\mathbb{R}^d$*, il* **triangolo** $T_{A,B,C}$ *con vertici* A, B, C *è l'insieme*

$$T_{A,B,C} := \Big\{X = \alpha A + \beta B + \gamma C \ : \ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 1\Big\}.$$

Si dice che il triangolo $T_{A,B,C}$ *è* **degenere** *se i tre punti* A, B *e* C *giaciono sulla stessa retta, ovvero se i vettori* $B - A$ *e* $C - A$ *sono colineari.*

Osservazione 13 (Triangoli nel piano)**.** *Consideriamo un triangolo non-degenere* $T_{A,B,C}$ *in* $\mathbb{R}^2$*. Allora, la parte interna di* $T_{A,B,C}$ *è data da*

$$\operatorname{int}\Big(T_{A,B,C}\Big) = \Big\{X = \alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathbb{R}^2 \ : \ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 1\Big\},$$

mentre la frontiera è

$$\partial\, T_{A,B,C} = [A,B] \cup [B,C] \cup [A,C].$$

Esempio 14. *In* $\mathbb{R}^2$ *il triangolo* T *con vertici*

$$(0,0)\ ,\quad (1,0)\quad e\quad (0,1)$$

è l'insieme

$$T = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\Big\}.$$

Area di un triangolo in $\mathbb{R}^2$

Proposizione 15. *In* $\mathbb{R}^2$ *consideriamo un triangolo non-degenere* $T_{A,B,C}$ *con vertici*

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\quad e\quad C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathrm{Area}\big(T_{A,B,C}\big)=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}b_1-a_1 & c_1-a_1\\ b_2-a_2 & c_2-a_2\end{pmatrix}\right|.$$

Dimostrazione. Useremo la formula del cambio di varabili con

$$\Omega_1=\Omega_2=\mathbb{R}^2\ ,$$

e con

$$\Phi(x,y)=A+x(B-A)+y(C-A)=\begin{pmatrix}a_1+x(b_1-a_1)+y(c_1-a_1)\\ a_2+x(b_2-a_2)+y(c_2-a_2)\end{pmatrix}$$

Oserviamo che se T è il triangolo con vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$,

$$T=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\Big\},$$

allora

$$\Phi(T)=T_{A,B,C},$$

e

$$\det\big(D\Phi(x,y)\big)=\begin{pmatrix}b_1-a_1 & c_1-a_1\\ b_2-a_2 & c_2-a_2\end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, per la formula del cambio di variabili abbiamo che

$$\mathrm{Area}\big(T_{A,B,C}\big)=\iint_{\Phi(T)}1\,du\,dv=\iint_T\left|\det\begin{pmatrix}b_1-a_1 & c_1-a_1\\ b_2-a_2 & c_2-a_2\end{pmatrix}\right|\,dx\,dy=\mathrm{Area}\,(T)\,\left|\det\begin{pmatrix}b_1-a_1 & c_1-a_1\\ b_2-a_2 & c_2-a_2\end{pmatrix}\right|.$$

Infine, basta calcolare l'area di T che per Fubini è data da

$$\mathrm{Area}\,(T)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy=\int_0^1(1-x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

□

Cambiamento di variabile. Il caso generale

Come corollario del Teorema 6 otteniamo il lemma seguente.

Lemma 16. *Siano* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^2$ *e*

$$v:\Omega\to\mathbb{R}$$

una funzione di classe C^1 *su* Ω *tale che*

$$|\partial_y v|(x,y)>0\quad per\ ogni\quad (x,y)\in\Omega\,.$$

Consideriamo la mappa

$$\Phi:\mathcal{R}\to\mathbb{R}\ ,\qquad \Phi(x,y)=\Big(x\ ,\ v(x,y)\Big).$$

Allora, per ogni $(x,y)\in\Omega$, *esiste un rettangolo*

$$\mathcal{R}=[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\times[y-\delta,y+\delta]\subset\Omega$$

con la proprietà seguente. Data una funzione limitata

$$F:\Phi(\mathcal{R})\to\mathbb{R}$$

si ha che F *è integrabile su* $\mathcal{R}$ *se e solo se la funzione*

$$F\circ\Phi:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$$

è integrabile su $\mathcal{R}$. Inoltre, vale la formula

$$\iint_{\mathcal{R}} F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(\mathcal{R})} F(u,v)\,du\,dv\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema della funzione inversa, esistono un intorno Ω_1 di (x,y) ed un intorno Ω_2 di $\Phi(x,y)$ tale che la mappa

$$\Phi:\Omega_1\to\Omega_2$$

sia un diffeomorfismo di classe C^1 con inversa

$$\Psi:\Omega_2\to\Omega_1$$

della forma

$$\Psi(x,v)=\big(x,\eta(x,v)\big),$$

dove anche

$$|\partial_v\eta|(x,v)>0\quad\text{per ogni}\quad(x,v)\in\Omega_2\,.$$

Scegliamo un rettangolo $\mathcal{R}_2$ centrato nel punto $\Phi(x,y)$ e contenuto in Ω_2. Scegliamo anche un rettangolo $\mathcal{R}_1$ centrato nel punto (x,y) e contenuto in Ω_1 tale che

$$\Phi(\mathcal{R}_1)\subset\mathcal{R}_2.$$

Ora, se

$$F:\Phi(\mathcal{R}_1)\to\mathbb{R}$$

è una funzione limitata e tale che

$$F\circ\Phi:\mathcal{R}_1\to\mathbb{R}$$

sia integrabile, allora per il Teorema 6, abbiamo che anche $F:\Phi(\mathcal{R}_1)\to\mathbb{R}$ e che vale la formula del cambiamento delle variabili. D'altra parte, se

$$F:\Phi(\mathcal{R}_1)\to\mathbb{R}$$

è integrabile, allora (per definizione) la funzione

$$\widetilde{F}(x,v)=\begin{cases}F(x,v) & \text{se}\quad (x,v)\in\Phi(\mathcal{R}_1);\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

è integrabile su $\mathcal{R}_2$ (ed ha lo stesso integrale su $\mathcal{R}_2$). Definiamo la funzione

$$G:=\widetilde{F}\circ\Phi.$$

Allora,

$$\widetilde{F}=G\circ\Psi$$

e quindi, applicando Teorema 6 al rettangolo $\mathcal{R}_2$ e alla mappa $\Psi:\mathcal{R}_2\to\mathbb{R}^2$, abbiamo che anche G deve essere integrabile. □

Analogamente, abbiamo lo stesso risultato nel contesto del Teorema 7.

Lemma 17. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^2$ e*

$$u:\Omega\to\mathbb{R}$$

una funzione di classe C^1 su Ω tale che

$$|\partial_x u|(x,y)>0\quad\textit{per ogni}\quad(x,y)\in\Omega\,.$$

Consideriamo la mappa

$$\Phi:\mathcal{R}\to\mathbb{R}\ ,\qquad \Phi(x,y)=\Big(u(x,y)\,,\,y\Big).$$

Allora per ogni $(x,y)\in\Omega$ esiste un rettangolo

$$\mathcal{R}=[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\times[y-\delta,y+\delta]\subset\Omega$$

con la proprietà seguente. Data una funzione limitata

$$F:\Phi(\mathcal{R})\to\mathbb{R}$$

si ha che F è integrabile su $\mathcal{R}$ se e solo se la funzione

$$F\circ\Phi:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$$

è integrabile su $\mathcal{R}$. Inoltre, vale la formula

$$\iint_{\mathcal{R}} F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(\mathcal{R})} F(u,v)\,du\,dv\,.$$

Ora possiamo dimostrare il teorema generale.

Teorema 18. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti in $\mathbb{R}^2$. Sia*

$$\Phi:\Omega_1\to\Omega_2\,,\quad \Phi(x,y)=\big(u(x,y),v(x,y)\big)\,,$$

un diffeomorfismo di classe C^1 con inversa

$$\Psi:\Omega_2\to\Omega_1\,.$$

Sia

$$F:\Omega_2\to\mathbb{R}\,,$$

una funzione limitata. Supponiamo che esiste un insieme compatto $D\subset\Omega_1$ tale che

$$F=0\quad su\quad \Omega_2\setminus\Phi(D).$$

Allora, F è integrabile se e solo se lo è la funzione composta

$$F\circ\Phi:\Omega_2\to\mathbb{R}\,.$$

Inoltre, vale la formula

$$\iint_D F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det\big(D\Phi(x,y)\big)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(D)} F(u,v)\,du\,dv\,.$$

Dimostrazione. Siccome Φ è un diffeomorfismo, per ogni $(x_0,y_0)\in\Omega_1$, abbiamo che

$$\det\begin{pmatrix}\partial_x u(x_0,y_0) & \partial_y u(x_0,y_0)\\ \partial_x v(x_0,y_0) & \partial_y v(x_0,y_0)\end{pmatrix}\neq 0\,.$$

In particolare,

$$\partial_x u(x_0,y_0)\,\partial_y v(x_0,y_0)\neq 0\qquad\text{oppure}\qquad \partial_x v(x_0,y_0)\,\partial_y u(x_0,y_0)\neq 0\,.$$

A meno di scambiare u con v (componendo con la mappa $(u,v)\mapsto(v,u)$), possiamo assumere che

$$\partial_x u(x_0,y_0)\,\partial_y v(x_0,y_0)\neq 0.$$

Esiste quindi un intorno $\widetilde\Omega_1$ di (x_0,y_0) dove

$$\partial_x u\neq 0.$$

Consideriamo la mappa

$$\Phi_1:\widetilde\Omega_1\to\mathbb{R}^2\,,\qquad \Phi_1(x,y)=\big(u(x,y),y\big).$$

Prendendo l'intorno $\widetilde\Omega_1$ abbastanza piccolo possiamo supporre che

$$\Phi_1:\widetilde\Omega_1\to\Phi_1(\widetilde\Omega_1)$$

sia un diffeomorfismo di classe C^1 con inversa

$$\Psi_1:\Phi_1(\widetilde\Omega_1)\to\widetilde\Omega_1$$

della forma

$$\Psi_1(u,y)=\big(\eta(u,y),y\big).$$

Consideriamo quindi la funzione

$$\Phi_2:\Phi_1(\widetilde\Omega_1)\to\mathbb{R}^2,$$

definita come

$$\Phi_2(u,y):=(u,v(\Psi_1(u,y)))=(u,v(\eta(u,y),y)).$$

Per costruzione,

$$\partial_y\Big[v\big(\eta(u,y),y\big)\Big]=\partial_y\eta(u,y)\partial_x v\big(\eta(u,y),y\big)+\partial_y v\big(\eta(u,y),y\big).$$

Ora, usando il fatto che $\eta(u(x,y),y)\equiv x$, abbiamo che

$$\begin{cases}0=\partial_y\Big[\eta\big(u(x,y),y\big)\Big]=\partial_y u(x,y)\partial_x\eta\big(u(x,y),y\big)+\partial_y\eta\big(u(x,y),y\big),\\ 1=\partial_x\Big[\eta\big(u(x,y),y\big)\Big]=\partial_x u(x,y)\partial_x\eta\big(u(x,y),y\big),\end{cases}$$

e quindi

$$\partial_y \eta(u,y) = -\partial_y u\big(\eta(u,y),y\big)\partial_x \eta(u,y) = -\frac{\partial_y u\big(\eta(u,y),y\big)}{\partial_x u\big(\eta(u,y),y\big)}\,.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\partial_y \Big[v\big(\eta(u,y),y\big)\Big] &= \partial_y \eta(u,y)\partial_x v\big(\eta(u,y),y\big) + \partial_y v\big(\eta(u,y),y\big)\\ &= \frac{1}{\partial_x u\big(\eta(u,y),y\big)} \det\begin{pmatrix}\partial_x u\big(\eta(u,y),y\big) & \partial_y u\big(\eta(u,y),y\big)\\ \partial_x v\big(\eta(u,y),y\big) & \partial_y v\big(\eta(u,y),y\big)\end{pmatrix} \neq 0.\end{aligned}$$

Esistono quindi un aperto

$$\widetilde{\Omega}_2 \subset \Phi_1(\widetilde{\Omega}_1)$$

tale che la mappa

$$\Phi_2 : \widetilde{\Omega}_2 \to \Phi_2(\widetilde{\Omega}_2)$$

sia un diffeomorfismo C^1. Inoltre, per costruzione si ha che

$$\Phi_2(\Phi_1(x,y)) = \big(u(x,y), v(x,y)\big) = \Phi(x,y).$$

Di conseguenza, applicando Lemma 16 e Lemma 17, possiamo trovare un rettangolo $\mathcal{R}_{(x_0,y_0)}$, centrato in (x_0,y_0) e contenuto in Ω_1, con la proprietà seguente:

Data una funzione limitata

$$G : \Phi(\mathcal{R}_{(x_0,y_0)}) \to \mathbb{R},$$

abbiamo che G è integrabile su $\Phi(\mathcal{R}_{(x_0,y_0)})$, se e solo se la funzione

$$G \circ \Phi : \mathcal{R}_{(x_0,y_0)} \to \mathbb{R},$$

è integrabile su $\mathcal{R}_{(x_0,y_0)}$. Inoltre, vale la formula

$$\iint_{\mathcal{R}_{(x_0,y_0)}} G\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det\big(D\Phi(x,y)\big)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(\mathcal{R}_{(x_0,y_0)})} G(u,v)\,du\,dv\,.$$

Ora, dato un compatto $D \subset \Omega_1$, la famiglia di rettangoli aperti

$$\Big\{\mathrm{int}\big(\mathcal{R}_{(x_0,y_0)}\big)\Big\}_{(x_0,y_0)\in D}$$

è un ricoprimento aperto di D. Si possono trovare quindi un numero finito di rettangoli

$$\Big\{\mathcal{R}_{(x_i,y_i)} \quad : \quad i = 1,\dots,N\Big\},$$

tali che

$$D \subset \Omega_D := \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{int}\big(\mathcal{R}_{(x_i,y_i)}\big).$$

Per ogni $i = 1,\dots,N$ possiamo trovare una funzione continua

$$\phi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

tale che

$$\phi_i(x,y) > 0 \quad \text{se} \quad (x,y) \in \mathcal{R}_{(x_i,y_i)} \quad \text{e} \quad \phi_i(x,y) = 0 \quad \text{altrimenti.}$$

Definiamo anche la funzione

$$\varphi_i : \Omega_D \to \mathcal{R}\ , \qquad \varphi_i := \frac{\phi_i}{\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_N}.$$

Per costruzione, le funzioni φ_i sono continue su Ω_D e

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_N \equiv 1 \quad \text{su} \quad D.$$

Di conseguenza, anche le funzioni

$$\psi_i := \varphi_i \circ \Psi \qquad \Big(\text{quindi} \quad \varphi_i = \psi_i(\Phi)\Big),$$

sono tali che

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_N \equiv 1 \quad \text{su} \quad \Phi(D).$$

Osserviamo che:

$$F \text{ è integrabile su } \Phi(D) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_i F \text{ è integrabile su } \Phi(D), \text{ per ogni } i = 1,\dots,N\ ;$$

$$F(\Phi) \text{ è integrabile su } D \quad \Leftrightarrow \quad \psi_i(\Phi)F(\Phi) \text{ è integrabile su } D, \text{ per ogni } i = 1, \dots, N \ .$$

Ora, per la scelta del rettangolo $\mathcal{R}_{(x_i,y_i)}$, abbiamo che

$$\psi_i F \text{ è integrabile su } \Phi(\mathcal{R}_{(x_i,y_i)}) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_i(\Phi)F(\Phi) \text{ è integrabile su } \mathcal{R}_{(x_i,y_i)}.$$

Siccome, per ogni i la funzione $\psi_i(\Phi)F(\Phi)$ è nulla al di fuori di $\mathcal{R}_{(x_i,y_i)}$, si ha che

$$\psi_i F \text{ è integrabile su } \Phi(D) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_i(\Phi)F(\Phi) \text{ è integrabile su } D.$$

Ma quindi

$$F \text{ è integrabile} \quad \Leftrightarrow \quad F(\Phi) \text{ è integrabile.}$$

Inoltre, siccome per ogni i vale la formula

$$\iint_D \psi_i(\Phi(x,y))F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det\big(D\Phi(x,y)\big)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(D)} \psi_i(u,v)F(u,v)\,du\,dv\,,$$

sommando per $i = 1, \dots, N$, otteniamo

$$\iint_D F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det\big(D\Phi(x,y)\big)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(D)} F(u,v)\,du\,dv\,. \qquad \square$$

Integrazione in coordinate polari

Per dimostrare il teorema principale di questa sezione (Teorema 20), avremo bisogno del lemma seguente.

Lemma 19. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^2$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Dato un $\ell \in \mathbb{R}$, sono equivalenti:*

(1) *F è integrabile su Ω e*

$$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy = \ell\ ;$$

(2) *Per ogni successioni di insiemi compatti e misurabili $D_n \subset \Omega$ tali che*

$$\lim_{n\to\infty} |D_n| = |\Omega|,$$

si ha che F è misurabile su D_n e

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} F(x,y)\,dx\,dy = \ell\ .$$

Dimostrazione. Per esercizio. $\square$

Teorema 20. *Sia $F : B_R \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Sia*

$$G : [0,R] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}\ , \qquad G(r,\theta) := rF\big(r\cos\theta,\ r\sin\theta\big)\,.$$

Allora, sono equivalenti:

(1) *F è integrabile su B_R;*
(2) *G è integrabile su $[0,R] \times [0,2\pi]$.*

Inoltre, vale la formula

$$\iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} F\big(r\cos\theta\,,\ r\sin\theta\big)r\,d\theta\,dr\ .$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\Phi(r,\theta) := \big(r\cos\theta, r\sin\theta\big),$$

e osserviamo che

$$\Phi : (0,+\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x,0)\ :\ x \geq 0\big\},$$

è un diffeomorfismo di classe C^1. Per ogni $\varepsilon > 0$, consideriamo il rettangolo

$$\mathcal{R}_\varepsilon = [\varepsilon, R] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

Allora, sono equivalenti:

(1ε) F è integrabile su $\Phi(\mathcal{R}_\varepsilon)$;
(2ε) $F(\Phi)$ è integrabile su $\mathcal{R}_\varepsilon$.

Inoltre,

$$\iint_{\Phi(\mathcal{R}_\varepsilon)} F(x,y)\,dx\,dy = \int_\varepsilon^R \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} F\big(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta\big)r\,d\theta\,dr\ .$$

Quindi, la tesi è segue dal Lemma 19 $\square$

Esempio 21 (Area di un disco in $\mathbb{R}^2$)**.** *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Allora*

$$|B_R| = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta = \pi R^2.$$

Esempio 22. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Allora*

$$\int_{B_R} x^2\,dx\,dy = \int_0^R\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta\,d\theta\,r\,dr = \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^R r^3\,dr\right) = \frac{\pi}{4}R^4.$$

Il volume di una palla in $\mathbb{R}^3$

Proposizione 23. *In dimensione 3, consideriamo la palla di centro $(0,0)$ e raggio R,*

$$B_R = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2<R^2\Big\}.$$

Allora, il volume di B_R è dato da

$$|B_R| = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Dimostrazione. Osserviamo che possiamo scrivere B_R come

$$B_R = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2\le R^2,\ -\sqrt{R^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}\Big\}\ .$$

Inoltre, indicheremo con D_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$, ovvero

$$D_R = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le R^2\Big\}\ .$$

Per calcolare il volume di B_R usiamo la formula di Fubini:

$$|B_R| = \iiint_{B_R} 1\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_R} dx\,dy\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1\,dz = 2\iint_{D_R} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Integrando in coordinate polari

$$x=r\cos\theta\ ,\quad y=r\sin\theta\ ,$$

otteniamo

$$\iint_{D_R} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\int_0^R\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2-r^2}\,d\theta\,r\,dr = 4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr$$

Usando il cambiamento di variabile $s=r^2$ abbiamo

$$4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr = 2\pi\int_0^{R^2}\sqrt{R^2-s}\,ds = 2\pi\int_0^{R^2}\sqrt{t}\,dt = 2\pi\frac{2}{3}\Big[t^{3/2}\Big]_0^{R^2} = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad \square$$

Esercizi

Esercizio 24. *Calcolare il volume dell'insieme* $D = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 0\le z\le 1-x^2-y^2\Big\}$.

Esercizio 25. *Calcolare* $\displaystyle\iint_{B_R}\frac{(1+x)^2}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy\,.$